NOUVEAUX PROGRAMMES DE LYCÉE

MESURES ET INCERTITUDES

Alain GOURSAUD
IA-IPR Sciences Physiques

1. AU BOEN (DE TERMINALE S)

(BOEN spécial n°8 du 13 octobre 2011 – Annexe relative au programme de Physique-Chimie pages 5 et 6)
Remarque : les préconisations sont quasiment identiques en séries STI2D et STL

Les informations destinées au professeur

Le tableau suivant résume les notions et compétences spécifiques relatives aux mesures et à leurs incertitudes que les élèves doivent maîtriser à la fin de la formation du lycée. Elles pourront être approfondies avec profit dans le cadre de la spécialité de Physique-Chimie de la terminale S.
L'ensemble des activités expérimentales, en italique dans la colonne de droite des programmes de première et de terminale, doit progressivement fournir l'occasion de leur mise en œuvre et de leur acquisition.
L'informatique peut jouer un rôle tout à fait particulier en fournissant aux élèves les outils nécessaires à l'évaluation des incertitudes sans qu'ils soient conduits à entrer dans le détail des outils mathématiques utilisés. L'accent doit être mis sur la prise de conscience des causes de limitation de la précision (sources d'erreurs) et de leurs implications sur la qualité de la mesure.
Dans une perspective de compréhension des bases de la métrologie, le professeur pourra mettre en regard la sémantique de ces bases et les acceptions courantes. Pour ces dernières, le vrai est ce qui est indubitable, l'incertain est ce dont on n'est pas sûr et l'erreur est ce qu'on aurait pu ne pas faire.
Dans le langage de la métrologie, il est question de valeur vraie, celle qu'on aurait obtenue avec une mesure parfaite (de précision illimitée). Cette valeur est donc inconnue, elle est même illusoire, en raison de la variabilité des phénomènes. On aura donc une valeur mesurée, et le résultat final de la mesure sera cette valeur, éventuellement issue d'une moyenne, assortie d'une incertitude (en fait un écart-type) résultant d'erreurs. Ici, l'incertitude et l'erreur sont des concepts scientifiques précis ; cette dichotomie peut entraîner des confusions (comme la masse et le poids) que l'enseignant peut souligner.

La formation des élèves

Notions et contenus	**Compétences expérimentales exigibles**
Erreurs et notions associées	Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments, etc.).
Incertitudes et notions associées	Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur. Évaluer l'incertitude de répétabilité à l'aide d'une formule d'évaluation fournie. Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure. Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.
Expression et acceptabilité du résultat	Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique. Associer l'incertitude à cette écriture. Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance. Évaluer la précision relative. Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné. Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une valeur de référence. Faire des propositions pour améliorer la démarche.

2. UN BRIN D'HISTOIRE ET UN OBJECTIF

Il fût un temps où le cours de Physique de Terminale (C à l'époque) commençait par un chapitre sur les erreurs et les incertitudes ; l'élève devait alors ingurgiter des calculs longs et fastidieux qui ne représentaient rien pour lui et qui ne se contextualiseraient que bien plus tard (dans le meilleur des cas). L'accent était alors mis sur les « calculs d'erreurs » qu'il aurait été plus juste d'appeler « calculs d'incertitudes ». Deux situations (simples) se présentaient alors selon que l'on souhaitait déterminer l'incertitude sur une grandeur Z calculée comme :

- la somme de deux grandeurs X et Y ($Z = X + Y$) ;
- le produit de deux grandeurs X et Y ($Z = X \,.\, Y$).

Les incertitudes (dites absolues) sur X et Y étant respectivement connues et notées ΔX et ΔY, on exigeait que les élèves connaissent et utilisent les formules suivantes :

- pour $Z = X + Y$, $\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$;
- pour $Z = X \,.\, Y$, $\Delta Z = Z\left(\dfrac{\Delta X}{X} + \dfrac{\Delta Y}{Y}\right)$.

Et le résultat était alors noté : $Z = Z_{calc} \pm \Delta Z$.
D'autres situations, plus délicates, se présentaient aussi parfois (il en était ainsi des opérations qui comportaient des « grandeurs liées » comme celle conduisant à déterminer la densité d'un solide par la « méthode du flacon »).
On peut noter deux problèmes majeurs liés à cette présentation :

- les encadrements qu'elle fournissait étaient stricts (alors qu'on sait bien qu'un encadrement est toujours associé à un niveau de confiance affiché) ;
- l'addition de grandeurs aléatoires aboutissait à des incertitudes sur la somme tout à fait gigantesques, alors que le plus probable est qu'il y ait, en partie, compensation des erreurs.

Devant les échecs des élèves dans ces calculs et le côté peu satisfaisant qu'ils présentaient, ils ont été supprimés sans être pour autant remplacés, dans un premier temps, par une autre approche. Un des résultats de cette première évolution a été une erreur méthodologique grave commise par les élèves qui ont se sont mis à suspecter certaines lois physiques parce qu'elles ne sont pas scrupuleusement vérifiées par l'expérience. Sans oublier d'autres éléments imputables, pour une certaine part au moins, à l'absence de raisonnement sur les mesures et les erreurs qui y sont liées comme le nombre de chiffres significatifs à conserver dans un résultat.

Aujourd'hui, après plusieurs tentatives plus ou moins suivies d'effets, les nouveaux programmes de lycée réaffirment la nécessité de donner du sens (la définition d'évaluer selon Guy BERGER) aux résultats obtenus que ce soit par mesure, par lecture ou par calcul. Retenons donc cet objectif : entraîner progressivement les élèves à rendre leurs résultats crédibles (nombre de chiffres significatifs, confiance, précision,...).
Cette introduction doit être progressive et rationnelle, et se faire au moment opportun. Les séances de travaux pratiques semblent se prêter particulièrement bien à ce travail dans la mesure où les élèves ont une base concrète d'appareils, de résultats contextualisés, etc. à leur disposition ; des comparaisons entre deux méthodes différentes, des analyses statistiques ou des mutualisations de résultats obtenus par des groupes différents peuvent aussi proposées dans le cadre du domaine de compétences VALIDER.

3. ASPECTS SCIENTIFIQUES ET MATHÉMATIQUES ; NOTATIONS

Pour choisir les activités adéquates à un travail autour des notions d'incertitudes, de précision, de qualité d'une mesure, etc. le professeur doit maîtriser un certain nombre de résultats issus de la statistique ou de l'analyse différentielle ; ce document ne détaillera pas ces résultats qui sont formulés, voire démontrés, dans de nombreux textes et publications : il se contentera de résumer les principales notions qui seront utilisées dans la suite. Parmi les textes conseillés, figure celui intitulé *Nombres, mesures et incertitudes*, rédigé par l'IGEN de Sciences Physiques et téléchargeable sur le site EDUSCOL à l'adresse précise :
http://eduscol.education.fr/cid60323/ressources-pour-le-lycee.html

3.1 Mesurage et erreur

Le mesurage (que l'on préfèrera à « la mesure ») d'une grandeur physique est l'ensemble des opérations permettant de déterminer une ou plusieurs valeurs de cette grandeur. L'un des résultats du mesurage est appelé « valeur mesurée » ; la différence entre la valeur mesurée m_i et la valeur vraie M_{vraie}, toujours inconnue, est appelée « erreur de mesure » : $E_R = m_i - M_{vraie}$.

3.2 Erreur aléatoire

Les conditions de répétabilité sont satisfaites quand le même opérateur (ou le même programme) effectue les mesures exactement dans les mêmes conditions ; le meilleur estimateur de la valeur du mesurande (la grandeur que l'on cherche à déterminer) est alors la valeur moyenne, notée $\overline{m}$, des N mesures. L'une de ces mesures, notée m_i diffèrera de $\overline{m}$. La différence $E_{Ra} = m_i - \overline{m}$ est appelée erreur aléatoire.

3.3 Erreur systématique

L'erreur systématique, notée E_{Rs}, est par définition égale à la différence entre la valeur moyenne $\overline{m}$ des N mesures effectuées et la valeur vraie de la grandeur mesurée, M_{vraie} : $E_{Rs} = \overline{m} - M_{vraie}$. En toute rigueur, le nombre de mesures N devrait tendre vers l'infini. Des trois relations précédentes, il vient : $E_R = E_{Ra} + E_{Rs}$.

3.4 Fidélité et justesse

Un instrument de mesure est fidèle s'il fournit des résultats très voisins lors de mesures effectuées dans les mêmes conditions ; il est dit juste si les résultats fournis sont dépourvus d'erreur systématique.

3.5 Incertitude de mesure

L'erreur de mesure étant toujours inconnue, on ne peut que chercher à l'estimer :

- soit par des méthodes statistiques : on parle alors d'une évaluation de type A ;
- soit en prenant en compte toute une série d'informations (données du fabricant, connaissance générale des instruments, mesures antérieures, etc.) quand les statistiques sont inapplicables (c'est le cas, en particulier, des situations à mesure unique) : on dit alors que l'évaluation est de type B.

Le résultat d'une mesure est exprimé sous forme d'un intervalle noté : $M = m \pm U(M)$, expression dans laquelle $U(M)$ est l'incertitude de mesure et m est une valeur particulière, prise pour centre de l'intervalle.

3.6 Évaluation de type A (cas d'une distribution de n valeurs)

Dans l'expression $M = m \pm U(M)$, la valeur centrale m de l'intervalle sera identifiée à la valeur moyenne $\overline{m}$ des valeurs obtenues. L'incertitude $U(M)$ sera déterminée à partir d'une estimation de l'écart-type S_{exp} de la distribution de valeurs : $S_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}$ expression dans laquelle n est le nombre de mesures. Cette incertitude dépendra du niveau de confiance exigé pour la mesure. Dans un intervalle dont le niveau de confiance est de 95%, on aura 95% de chances d'y trouver la valeur vraie.

On montre que : $U(M) = t_{\%} \frac{S_{\text{exp}}}{\sqrt{n}}$; $t_{\%}$ est le paramètre de Student à % de niveau de confiance et dépend du nombre de mesures effectuées. Il en existe des tables ; généralement, les niveaux de confiance choisis sont de 95% ou 99%. Pour une quinzaine de valeurs obtenues, t_{95} est voisin de 2 alors que t_{99} est voisin de 3.

Remarques :

- L'expression $\frac{S_{\text{exp}}}{\sqrt{n}}$ est appelée incertitude type ; on la note $u(M)$;
- Pour éviter toute confusion, l'incertitude $U(M)$ est souvent appelée incertitude élargie (Vocabulaire International de Métrologie, document IGEN) ou incertitude de répétabilité (BOEN, Hachette, etc.). On la trouve souvent encore notée ΔM, écriture qui tend cependant à disparaître.

3.7 Évaluation de type B (cas d'une seule mesure)

Dans l'expression $M = m \pm U(M)$ (ou $M = m \pm \Delta M$), la valeur centrale m est l'unique valeur mesurée ou déterminée par une méthode donnée. L'incertitude (élargie) $U(M)$ s'exprime comme le produit d'un facteur k dépendant du niveau de confiance attendu et d'une estimation S_{mes} de l'erreur de mesure (ou incertitude type). Pour un niveau de confiance de 95%, on prendra généralement $k = 2$.

Selon les situations, la détermination de S_{mes} et donc de *U(M)* s'effectue de façon variée ; ainsi :

- si la mesure est effectuée avec un appareil pour lequel le fabricant indique l'incertitude type S_{fab}, on prend naturellement cette indication en compte : $U(M_{95}) = 2\, S_{fab}$;
- si la mesure est effectuée avec un appareil pour lequel le fabricant fournit une indication Δ_{fab} sans préciser qu'il s'agit d'une incertitude type, on prend : $S_{mes} = \frac{\Delta_{fab}}{\sqrt{3}}$ et $U(M_{95}) = 2\,\frac{\Delta_{fab}}{\sqrt{3}}$;
- si la mesure a été effectuée avec un appareil analogique, on prendra $U(M_{95}) = 2\,\frac{1\,graduation}{\sqrt{12}}$;
- etc.

On ne saurait couvrir tous les cas de figure possibles…

3.8 Incertitudes composées

Dans certains cas, des erreurs de type A sont combinées avec des erreurs de type B ; on montre alors que les incertitudes se combinent (avec des notations évidentes) : $U(M) = \sqrt{(U(M_A))^2 + (U(M_B))^2}$.

Enfin, on peut être amené à calculer l'incertitude *U(Y)* sur une grandeur physique *Y* obtenue à partir d'une expression dans laquelle interviennent plusieurs grandeurs X_k tel que : $Y = f(X_k)$; on montre alors que ΔY se calcule à partir de la formule issue des fonctions de plusieurs variables : $U(Y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_k} U(X_k) \right)^2}$.

Exemples :

- pour $Z = X + Y$ ou $Z = X - Y$; $U(Z) = \sqrt{U(X)^2 + U(Y)^2}$
- pour $Z = X.Y$ ou $Z = \frac{X}{Y}$; $U(Z) = Z \,.\, \sqrt{\left(\frac{U(X)}{X}\right)^2 + \left(\frac{U(Y)}{Y}\right)^2}$

Remarque : ce document ne cherche pas à couvrir toutes les situations ; on a ainsi volontairement écarté dans ce paragraphe les incertitudes composées concernant des grandeurs corrélées.

3.9 Incertitude relative

L'incertitude relative ou précision sur une mesure est définie comme le quotient de l'incertitude ΔM par la valeur de la mesure (cas d'une seule mesure) ou de la valeur moyenne des mesures effectuées (cas d'une distribution de valeurs) ; elle s'exprime régulièrement en pourcentage.

À noter qu'en utilisant les précisions P_X sur les grandeurs mesurées, certaines expressions d'incertitudes composées se simplifient ; ainsi pour l'exemple précédent ($Y = U.V$), on a : $P_Y = \sqrt{{P_U}^2 + {P_V}^2}$.

4. PRÉCONISATIONS PÉDAGOGIQUES

Ce paragraphe n'est pas prescriptif : il a pour but d'illustrer, par quelques exemples concrets, différentes approches qui semblent pouvoir être proposées aux élèves pour les initier progressivement aux questions liées aux incertitudes inhérentes à toute mesure en Physique non pas dans le sens de les « faire douter de tout » mais au contraire de leur permettre de cerner de façon rigoureuse la qualité d'une mesure.

Il a déjà été souligné que les plages dédiées aux travaux pratiques sont sans doute à privilégier pour traiter ces questions ; ce n'est pas pourtant pas la seule situation à mobiliser : l'accompagnement personnalisé, en classe de 1ère S est lui aussi propice à traiter des incertitudes de mesures, à la précision d'un résultat et du nombre de chiffres significatifs qu'il convient de lui attribuer. Un devoir surveillé peut aussi comporter une question concernant la précision ou les incertitudes. Rappelons que dans ce cas, les formules devant être utilisées par les élèves seront systématiquement fournies (il en serait bien entendu ainsi si un sujet de baccalauréat devait aborder ce domaine ; voir à cet égard, l'annale 0, n°2- Exercice 3, question 4).

Les notations retenues sont celles recommandées par le BIPM ; ce n'est pas celles rencontrées dans la plupart des manuels scolaires ; nous laisserons le lecteur utiliser celle qui lui conviendra le mieux.

Enfin, le découpage effectué sur les trois niveaux du lycée est-il sans doute arbitraire : des déplacements peuvent être envisagés à partir du moment où l'on respecte une progressivité raisonnable au sens où elle est compatible avec le niveau des élèves (en Mathématiques, en particulier).

4.1 En classe de Seconde

A. Calculer une valeur moyenne

La mise en commun de valeurs obtenues avec le même dispositif et dans les mêmes conditions permet de mieux cerner le résultat recherché qu'une seule mesure prise isolément si les erreurs sont aléatoires. En effet, par définition, une erreur aléatoire a autant de chances d'être en défaut qu'en excès et le calcul de la moyenne a toutes les chances de faire jouer une certaine compensation entre les erreurs individuelles.

Considérons le TP sur la réfraction de la lumière avec le dispositif du demi-cylindre de plexiglas. L'une des applications de ce dispositif est de déterminer l'indice de réfraction n du matériau. Le professeur peut alors noter au tableau les valeurs n_i obtenues par les différents groupes (autour de 8 valeurs, ou 16 si l'on mène l'analyse en classe entière). On pourra, dans un premier temps, observer les valeurs qui s'éloignent assez du « paquet » principal et chercher à en trouver une explication. On calculera alors la moyenne des valeurs que l'on notera $\overline{n}$ en utilisant la calculatrice ou un tableur selon la configuration de la salle.

Il ne faut pas croire que le calcul d'une valeur moyenne n'a de sens que pour les grandes distributions : en Chimie, il arrive fréquemment que l'on recommande de réaliser deux dosages précis à la suite d'un dosage rapide et que l'on prenne la moyenne entre les deux valeurs obtenues si celles-ci ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre (le critère retenu pouvant être arbitraire aux yeux des élèves ou explicite selon le niveau de classe où l'on se situe ; en Terminale, nous verrons qu'il sera explicite).

B. Déterminer l'ordre de grandeur de l'incertitude liée à une mesure

Avant de pouvoir déterminer des intervalles de confiance de façon rigoureuse, il semble souhaitable de faire réfléchir les élèves à des ordres de grandeur concernant les incertitudes de mesure. Ainsi, peu importe si l'incertitude de mesure d'une longueur avec un double-décimètre doit être prise égale à une division ou une demi-division : ce qui compte à ce niveau-là, c'est que la longueur est déterminée avec une précision de l'ordre du mm et non du cm ou dixième de mm. Ce qui est évident avec l'exemple précédent peut être beaucoup plus délicat avec des instruments plus spécialisés…

Considérons l'oscilloscope utilisé à l'occasion d'une activité expérimentale sur les signaux périodiques ; quel est l'ordre de grandeur de l'incertitude sur les mesures effectuées :
- horizontalement, sur la mesure du temps ?
- verticalement, sur la mesure de la tension ?

Répondre à ces questions suppose que l'élève puisse déterminer la sensibilité horizontale, d'abord en divisions de l'écran, puis en secondes après utilisation du réglage de l'oscilloscope (durée par division) et de la même façon, verticalement, pour arriver à l'incertitude sur la tension mesurée.

C. Déterminer le nombre de chiffres significatifs à conserver dans un résultat

Deux cas de figure sont à considérer selon que le résultat provient d'une mesure ou d'un calcul mené à partir de grandeurs physiques, chacune d'entre elles pouvant être entachée d'erreur.

Si le résultat provient d'une mesure, il peut se faire que plusieurs valeurs aient été trouvées (par différents groupes, par exemple) ; dans ce cas, la variabilité de ces valeurs peut permettre de dégager les chiffres à conserver à ceux à rejeter. Il n'est ainsi pas rare que les élèves proposent, pour l'indice de réfraction d'un milieu donné, une valeur telle que 1,524 si celle-ci a été générée par un tableur (utilisé avec la modélisation linéaire) ; on fera alors remarquer, après comparaison des valeurs des différents groupes que l'indice varie entre 1,50 et 1,54 par exemple et que le 2 est sans doute déjà excessif ; a fortiori, le 4 devra être retiré.
Si le résultat provient d'une mesure unique, il semble a priori plus simple de l'exprimer correctement. C'est oublier, entre autres, les « 0 » significatifs qui ont du mal à être compris par les élèves. Quand on préparera une solution de concentration donnée, on insistera donc sur les écritures telles que : la masse m = 2,00 g ; le volume V = 10,0 mL ; etc.

Si le résultat provient d'un calcul, la règle est qu'il ne peut pas être plus précis que la moins précise des données qui ont servi à le calculer. En toute rigueur, il faudrait donc calculer la précision avec laquelle est connue chaque grandeur ce qui sous entendrait de passer aux incertitudes relatives, ce que nous avons plutôt envisagé pour la classe de Première. Si l'on veut respecter cette proposition, on se contentera alors d'un raisonnement qualitatif, largement suffisant dans de nombreux cas (ou un raisonnement n'utilisant que des ordres de grandeur incontestables).
Imaginons que l'on soit amené à calculer une vitesse par application de la formule $v = d/\Delta t$. Le travail à faire prend appui sur un enregistrement chronophotographique et un logiciel de pointage ; le temps séparant deux images successives est de 0,04 s (25 images par seconde). Le pointeur du logiciel est à l'évidence précis au mieux au millimètre près ; si les images sont séparées approximativement d'une dizaine ou d'une vingtaine de mm, il est « évident » que le facteur limitant la précision sur la vitesse sera la distance *d*. On pourra alors considérer que la vitesse sera connue avec une précision comparable à celle de la distance.
Il est évidemment plus simple de raisonner quand le calcul est effectué à l'aide d'une addition.
Prenons l'exemple du calcul de la masse molaire de l'éthanol.
Le problème posé est accompagné des données suivantes :

- Masses molaires atomiques : M(C) = 12,0 $g.mol^{-1}$; M(H) = 1,00 $g.mol^{-1}$; M(O) = 16,0 $g.mol^{-1}$
- Formule de l'éthanol : C_2H_5OH

Le résultat attendu est 46,0 $g.mol^{-1}$. Les résultats tels que 46,00 $g.mol^{-1}$ ou 46 $g.mol^{-1}$ sont à rejeter.

4.2 En classe de Première S, STL ou STI2D

A. Calculer un écart-type

Indiquons sans plus tarder que cette notion est introduite par les cours de Mathématiques de Première S et de Premières technologiques STI2D et STL dans le module « Statistiques et probabilités » ; il y a donc tout intérêt à se rapprocher de son collègue enseignant les Mathématiques pour aborder cette notion.
On définit deux écarts-types en statistique qui répondent aux formules suivantes :
L'écart type d'ordre *n :* $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}$ et l'écart type d'ordre *n – 1 :* $\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}$.
On démontre que le second est un meilleur estimateur de la dispersion d'une distribution expérimentale de valeurs, car « sans biais » ; c'est naturellement celui-là qui sera utilisé comme indiqué au point 3.6.
Remarques :

- selon la calculatrice (ou le tableur) utilisée, il se peut que seul σ_n soit directement accessible ; on devra alors calculer σ_{n-1} en utilisant la relation : $\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\ \sigma_n$
- quand le nombre de valeurs devient grand, la différence entre les deux écarts types est négligeable. Ainsi, pour $n = 10$, l'écart n'est déjà plus que de 5%.
- Avec EXCEL, Open Office ou Libre Office, σ_n est obtenu avec la fonction ECARTYPEP et σ_{n-1} avec la fonction ECARTYPE.

En classe de Première, à l'issue d'une activité expérimentale qui a conduit les *n* binômes à déterminer une grandeur physique dans les mêmes conditions (matériel utilisé, méthode employée, etc.), on pourra opérer une première approche des encadrements physiques (qui seront appelés intervalles de confiance en classe terminale). On rappellera que la valeur moyenne de la distribution des valeurs obtenues est le meilleur estimateur possible de la valeur vraie recherchée ; on pourra alors justifier que cette valeur moyenne sera prise comme centre de l'intervalle. En lien avec le cours de Mathématiques, on affirmera alors que l'écart type de cette distribution est un bon indicateur de la dispersion des valeurs et on le fera calculer. On pourra enfin affirmer que l'incertitude liée à la mesure effectuée peut s'écrire sous la forme : $U(M) = k.\sigma_{n-1}$; *k* étant une constante dont la valeur sera précisée en classe terminale.
Remarque : en réalité, comme précisé plus haut, *k* dépend de deux paramètres : le taux de confiance attendu et le nombre de valeurs de la distribution ; il serait donc plus correct d'écrire : $U(M) = k.\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Le travail peut être fait sur le champ de pesanteur (détermination de *g*), une concentration molaire (à l'issue d'un dosage par étalonnage, etc.).

Une petite anecdote : voilà un certain nombre d'années (…), un professeur de Sciences Physiques faisait déterminer tous les ans à ses élèves la valeur de *g* à l'aide du même dispositif dans une expérience de chute libre. Il en était arrivé à plusieurs centaines de valeurs cumulées. Et d'une année sur l'autre, la valeur moyenne de sa distribution $\overline{g}$ ne variait plus. On pouvait alors se demander : à quoi bon continuer ? Il répondait que si la valeur estimée pour *g* restait identique, tous les ans elle était approchée avec une plus grande précision dans la mesure où l'incertitude sur cette valeur diminuait un peu quand le nombre de valeurs passait de *n* à *n + 20* ; en effet, si l'on admet que les valeurs trouvées l'année *p* ne diffèrent pas de celles trouvées avant, on peut comprendre que σ_{n-1} ne varie pas, mais $\sqrt{n}$ augmente légèrement et, par voie de conséquence, *U(g)* diminue avec le temps !

B. Calculer la précision d'une mesure, d'un résultat

La précision (parfois nommée « relative ») d'une mesure est définie comme le rapport entre l'incertitude sur la mesure et la valeur trouvée pour cette dernière (ou la valeur moyenne de la distribution de valeurs dans le cas d'une série statistique). Elle constitue un indicateur pertinent sur la qualité de la mesure ; elle s'exprime régulièrement en pour cent (%).
Considérons la mesure de deux durées différentes :

- le temps mis par un sprinteur pour courir un 100 m : 9,88 s à 1/100$^{\text{ème}}$ de seconde près ;
- le temps mis par un marathonien pour courir son épreuve : 2 h 12 min 15 s à 1s près.

Question : quelle est le résultat le plus précis ?
Il faut calculer les précisions de ces deux résultats que nous appellerons respectivement P_1 et P_2.

$$P_1 = \frac{0{,}01}{9{,}98} \approx 0{,}001 = 0{,}1\,\% \qquad P_2 = \frac{1}{2*3600+12*60+15} = \frac{1}{7935} \approx 1{,}26.10^{-4} \approx 0{,}013\,\%$$

Ainsi, et cela peut surprendre, le temps mis par le marathonien, bien qu'arrondi à la seconde est exprimé avec une précision presque dix fois plus grande que celui du sprinteur donné au 1/100$^{\text{ème}}$ de seconde !

C. Utiliser les écarts types pour comparer plusieurs méthodes expérimentales

Notons cet objectif issu du programme de Mathématiques : *Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.* Le professeur de Physique peut fournir ces « séries statistiques » à son collègue et/ou les « travailler » avec lui.
En quoi, cette comparaison peut-elle être pertinente pour le physicien ?
La réponse n'est pas immédiate, mais s'impose si on y réfléchit un tant soit peu !
Soient deux séries de valeurs obtenues, notées S_1 et S_2 et conduisant à déterminer la même grandeur *X*. L'incertitude sur la mesure de X sera notée $U(X_1)$ pour la série S_1 et $U(X_2)$ pour la série S_2 ; toutes choses égales par ailleurs (et en particulier si chaque série comporte le même nombre de valeurs), les incertitudes seront proportionnelles aux écarts types : $U(X_1) = k.\sigma_1$ et $U(X_2)= k.\sigma_2$. Les précisions P_1 et P_2 associées aux deux séries seront : $P_1 = \frac{U(X_1)}{\overline{X_1}} = \frac{k\sigma_1}{\overline{X_1}}$ et $P_2 = \frac{U(X_2)}{\overline{X_2}} = \frac{k\sigma_2}{\overline{X_2}}$. Si l'on suppose que les valeurs moyennes $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ sont très voisines, la mesure la plus précise est celle correspondant à la série de plus faible écart type.

Si l'on dispose de deux méthodes expérimentales différentes pour déterminer la même grandeur inconnue, la méthode la plus précise est celle qui conduit à l'écart type le plus faible. On suppose, rappelons-le, que les deux méthodes sont statistiquement comparables (même nombre de valeurs, en particulier).
On peut se demander dans l'optique de déterminer l'indice de réfraction du plexiglas s'il est préférable de réaliser l'expérience dans le sens air $\rightarrow$ plexiglas ou plexiglas $\rightarrow$ air. Toutes les considérations théoriques restent vaines. L'auteur de ces lignes, pour en avoir fait jadis l'expérience (qui lui avait été suggérée par l'Inspecteur général René MOREAU), affirme que c'est la seconde qui donne l'écart type le plus faible ; c'est donc dans le sens plexiglas $\rightarrow$ air que la détermination de l'indice $n_{plexiglas}$ est la plus précise !

4.3 En classe de Terminale S, STL ou STI2D

Nous voilà arrivés au terme des enseignements dispensés au lycée, tout au moins pour ce qui concerne les classes du secondaire. Les programmes officiels ne mentionnent de façon explicite ce travail sur les erreurs et les incertitudes de mesure qu'à ce niveau terminal ; nous avons déjà indiqué que, bien évidemment, il convenait d'y sensibiliser les élèves en amont, dès la classe de Seconde et même dès le collège ; les lignes qui précèdent en ont donné quelques exemples.
Mais c'est dans les classes des différentes terminales scientifiques (S, STI2D, STL) que l'on ira le plus loin sans pour autant développer abusivement un sujet devenant très rapidement complexe ; les élèves qui choisiront de poursuivre des études supérieures scientifiques auront l'occasion d'approfondir ces notions une fois qu'ils auront acquis le bagage mathématique nécessaire (sur les fonctions de plusieurs variables, par exemple). Là encore, nous recommandons la lecture du programme de Mathématiques, en particulier le module 3 (Probabilités et statistiques) dont le préambule comporte ces lignes : *… Le programme en propose quelques exemples [il s'agit des problèmes associés aux données continues] et, en particulier, la loi normale qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %. Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines.*
On aura compris que la Physique-Chimie est directement visée.

Les ouvrages et autres textes cités dans la bibliographie qui figure en dernier point de ce document offrent une grande variété d'exemples qui peuvent être utilisés par les enseignants, tels que ou adaptés (aux objectifs que l'on se fixe, au niveau des élèves, à leurs acquis en Mathématiques à l'instant *t*, etc.) ; plusieurs manuels développent aussi ce sujet en plus ou moins grande adéquation aves les notations et les objectifs de formation des élèves : nous laissons le lecteur de ce document libre de ses choix qui méritent d'être éclairés par l'objectif majeur : analyser l'ensemble des résultats de façon critique.

Quatre situations seront décrites dans ce document à titre d'exemples. Elles ont été choisies pour illustrer à la fois la complexité du sujet et le fait qu'on pouvait trouver des points d'appui pour le rendre accessible aux élèves et, surtout, pour leur montrer la plus-value scientifique qu'apporte cette approche. Nous insistons une dernière fois sur le fait que toute formule nécessaire aux calculs à effectuer doit être fournie aux élèves ; il en est bien évidemment de même des valeurs tabulées (dont les coefficients de Student).

A. Calculer un intervalle de confiance suite à une analyse statistique de données expérimentales

À l'issue d'une activité expérimentale destinée à déterminer une constante d'acidité, le professeur a relevé les valeurs trouvées par chaque groupe pour la constante pKa du couple CH_3CO_2H / CH_3COO^-.

Groupes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pKa	4.25	4.55	4.75	4.6	4.65	4.75	4.8	4.5	4.8	5	4.75	4.7

Un tableur fournit la valeur moyenne de la distribution : $\overline{pKa}$ = 4,675

et celle de l'écart type $\sigma_{n-1} = S_{exp}$ = 0,188

Il vient : $U(M) = t_{\%} \dfrac{S_{\text{exp}}}{\sqrt{n}}$; *n* est le nombre de valeurs, soit ici 12.

Les tables nous donnent les valeurs des coefficients de Student $t_{\%}$ pour $n = 12$: t_{95} = 2,20 et t_{99} = 3,11.
Soit : $U(pKa_{95})$ = 0,12 *et* $U(pKa_{99})$ = 0,17
Les mesures effectuées pourront ainsi être écrites :

- pour un intervalle de confiance à 95% : $pKa = 4{,}67 \pm 0{,}12$ ou I_{95} = [4,55 ; 4,79]
- pour un intervalle de confiance à 99% : $pKa = 4{,}67 \pm 0{,}17$ ou I_{99} = [4,50 ; 4,84]

Rappelons que ces résultats ne tiennent compte que des erreurs aléatoires ; si une erreur systématique existe dans les mesures effectuées, elle peut « décentrer » la valeur moyenne par rapport à la valeur vraie.
Les règles d'écriture des résultats recommandent de conserver le premier chiffre entaché d'erreur et le second que l'on arrondit ; il convient donc d'écrire pour le pKa centre de l'intervalle de confiance : 4,67.

L'examen des résultats individuels de la distribution montre que deux valeurs sortent de l'intervalle de confiance à 99% : la valeur n°1 (4,25) et la valeur 10 (5). On admet assez généralement que si une valeur s'écarte de la valeur centrale de la distribution de plus de 2 fois l'incertitude élargie, il convient de l'écarter en la déclarant « valeur aberrante aux critères de recevabilité définis ».

On peut donc bâtir un nouvel intervalle « de recevabilité » $I_{rec} = [\overline{pKa} - 2\,U(pKa)\,;\ \overline{pKa} + 2\,U(pKa)]$

Pour un niveau de confiance de 95% : I_{rec} = [4,43 ; 4,91]

Pour un niveau de confiance de 99% : I_{rec} = [4,33 ; 5,01]

On observe que, dans les deux cas, la valeur n°1 doit être écartée ; la valeur n°10 ne le sera que dans le cas d'un niveau de confiance à 95%. On ne s'étonnera pas de voir que le nombre de valeurs acceptables est plus important pour un niveau de confiance supérieur : en effet, les intervalles étant davantage élargis, on y trouvera plus de valeurs acceptées.

On peut alors affiner le résultat en refaisant le calcul après avoir éliminé la valeur aberrante.

Les nouvelles valeurs sont : $\overline{pKa}$ = 4,714 ; $\sigma_{n-1} = S_{exp}$ = 0,138 ; $U(pKa_{95})$ = 0,09 *et* $U(pKa_{99})$ = 0,13

D'où les nouveaux intervalles de confiance :

- pour un intervalle de confiance à 95% : $pKa = 4,71 \pm 0,09$ ou I_{95} = [4,62 ; 4,80]
- pour un intervalle de confiance à 99% : $pKa = 4,71 \pm 0,13$ ou I_{99} = [4,58 ; 4,84]

Remarques :

- La méthode suivie a permis de disposer d'un critère objectif pour éliminer une valeur et pour améliorer, par voie de conséquence, la qualité du résultat ;
- Cette présentation représente le maximum qu'il est possible de demander aux élèves sur le sujet ;
- Il n'est pas question de refaire ce genre d'analyse à chaque fois que les élèves acquièrent des mesures susceptibles de se prêter à une étude statistique mais de la proposer deux ou trois fois dans l'année en TP comme en exercice d'application.

B. Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure

Nous serons plus rapides sur cette situation décrite de façon assez complète dans bon nombre de manuels.

<u>Premier cas</u> : un multimètre utilisé en voltmètre sur le calibre 400 mV continu

Information du constructeur : Précision : 0,8% + 2 unités

Valeur lue par l'élève : 145,8

Comment écrire le résultat ?

Le constructeur ne précise pas si l'information est une « incertitude-type » ; il convient donc de prendre pour incertitude type $S_{mes} = \dfrac{\Delta_{fab}}{\sqrt{3}}$ et pour incertitude élargie au taux de confiance de 95%, $U(U_{95}) = 2\,\dfrac{\Delta_{fab}}{\sqrt{3}}$.

Soit : Δ_{fab} = 0,8%*145,8 + 2*0,1 = 1,4 mV ; S_{mes} = 0,81 mV ; $U(U_{95})$ = 1,6 mV.

On écrira donc la tension mesurée : $U = 145,8 \pm 1,6$ mV ou $U = 146 \pm 2$ mV.

Remarques :

- Il peut s'avérer intéressant d'apprendre aux élèves la signification d'une notice de constructeur. Le calcul qui suit est forcément hermétique aux élèves à ce niveau et on ne devra pas y insister.
- Le même type de calcul sera applicable à de nombreux appareils de laboratoire, comme la verrerie jaugée ; ainsi, avec une pipette de 20,0 mL de classe A (tolérance 0,2%), l'incertitude que l'on peut calculer sur le volume sera : $U(V) = 2\dfrac{0,002*20}{\sqrt{3}}$ = 0,046 mL # 0,05 mL ; I_{95} = [19,95 mL ; 20,05 mL]

<u>Deuxième cas</u> : mesure effectuée avec un appareil analogique

L'élève utilise une règle pour faire des mesures de longueurs lors d'un travail expérimental sur le champ de pesanteur ; dans ce cas, l'incertitude type à prendre sera $S_{exp} = \dfrac{1\,\text{graduation}}{\sqrt{12}}$ et l'incertitude élargie vaudra, comme précédemment, 2 fois l'incertitude type. Soit pour une règle graduée en millimètres :

S_{exp} = 0,29 mm et Δl_{95} = 0,57 mm ; un résultat typique pourra donc être tel que : $l = 26,5 \pm 0,6$ mm.

C. Évaluer l'incertitude portant sur un résultat combinant plusieurs grandeurs entachées d'incertitudes

C'est ce point qui constituait les fameux calculs d'incertitudes qui ont découragé tant d'élèves par le passé. Compte tenu des connaissances en Mathématiques d'un élève de Terminale scientifique de ce début de millénaire, ces calculs ne peuvent être qu'une série d'applications de formules qu'il ne saurait être question d'expliciter ou de justifier. On restera donc excessivement modeste sur ce sujet et on ne le traitera que dans des cas simples, voire élémentaires. Nous présenterons deux situations, la seconde étant plus délicate que la première. Aller au-delà nous semblerait peu pertinent (sauf, éventuellement, dans la composante Approfondissement de l'accompagnement personnalisé, si des demandes se manifestaient.

<u>Premier cas</u> : La grandeur calculée est le produit (ou le quotient) de deux grandeurs de base
Expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un solide de masse *m* et d'altitude *h* par rapport au sol, pris comme référence : $Ep = mgh$.

La formule à utiliser est : $\dfrac{U(Ep)}{Ep}=\sqrt{\left(\dfrac{U(m)}{m}\right)^2+\left(\dfrac{U(g)}{g}\right)^2+\left(\dfrac{U(h)}{h}\right)^2}$

Le solide a été pesé à la balance de sensibilité 1 g ; la mesure a donné m = 245 g.
L'altitude de l'objet par rapport au sol a été mesurée avec une règle à 1 cm près ; h = 182 cm.
La valeur de l'intensité du champ de pesanteur est de 9,81 m.s^{-2} connu à 0,01 m.s^{-2} près.
La valeur calculée de l'énergie potentielle de pesanteur est alors : Ep = 4,374 J
Il faut d'abord calculer les incertitudes types sur chaque grandeur. On admettra que l'on se trouve dans le deuxième cas du paragraphe précédent pour chaque grandeur. Donc, les incertitudes (élargies) seront :

$U(m)$ = 0,58 g $U(g)$ = 0,006 m.s^{-2} $U(h)$ = 0,58 cm

On aura donc : $\dfrac{U(Ep)}{Ep}=\sqrt{\left(\dfrac{0{,}58}{245}\right)^2+\left(\dfrac{0{,}006}{9{,}81}\right)^2+\left(\dfrac{0{,}58}{182}\right)^2} = 4{,}0.10^{-3}$

Ce qui permet de calculer $U(Ep)$ = 0,017 J ; le résultat final devra donc être écrit : $Ep = 4{,}37 \pm 0{,}02$ J.
On aurait pu aussi écrire : $Ep = 4{,}374 \pm 0{,}017$ J.

<u>Deuxième cas</u> : La formule liant la grandeur calculée aux grandeurs de base est plus compliquée
Expression de l'énergie cinétique d'un solide de masse *m* animé d'une vitesse *v* : $Ec = ½ mv^2$.

La formule à appliquer est alors : $\dfrac{U(Ec)}{Ec}=\sqrt{\left(\dfrac{U(m)}{m}\right)^2+\left(2\dfrac{U(v)}{v}\right)^2}$

Nous ne détaillerons pas les calculs qui suivraient et qui seraient tout à fait comparables aux précédents.

Remarques :

- Au-delà des calculs, ce qui est important c'est sans doute d'identifier dans le cas de ces incertitudes composées, le « facteur limitant », c'est-à-dire la grandeur dont la précision est la plus faible et qui est donc responsable de l'incertitude sur le résultat final ; ainsi, dans le calcul sur l'incertitude liée à l'énergie potentielle de pesanteur, on peut remarquer que les trois termes sous la racine et qui sont les précisions sur chaque grandeur source, sont d'importance très inégale :

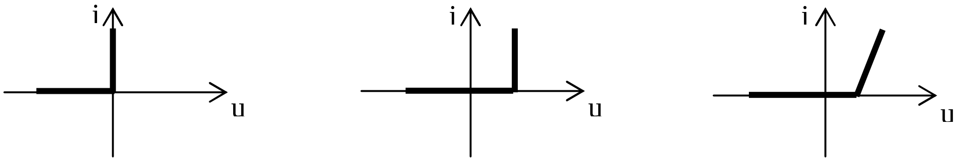
  $\dfrac{U(m)}{m} = 2{,}4.10^{-3}$ soit 0,23% $\dfrac{U(g)}{g} = 6{,}1.10^{-4}$ soit 0,06% $\dfrac{U(h)}{h} = 3{,}2.10^{-3}$ soit 0,32%

  On pourrait négliger l'incertitude sur *g* sans modifier notoirement le résultat.
- À noter qu'à une grande précision, correspond un $\dfrac{U(x)}{x}$ faible !
- En poursuivant la remarque précédente, on peut dire qu'on dispose d'un moyen puissant pour améliorer le résultat ; en effet, la précision sur le résultat sera augmentée si l'on agit sur la variable entachée de la plus grande incertitude. Dans l'exemple ci-dessus, c'est la mesure de l'altitude du solide qui est la moins précise (d'assez peu il est vrai ; il y a des cas plus flagrants).
- Si un élève, à qui l'on ne donne pas la valeur de *g*, se pose la question de savoir s'il doit prendre 10 ou 9,8 ou 9,81 m.s^{-2}, ce calcul est aussi à même de le renseigner ; à l'évidence, prendre 10 ne serait pas satisfaisant car la valeur serait à 2% près ce qui deviendrait la variable la moins précise !

D. Valider un résultat

Le titre de ce paragraphe renvoie à l'un des domaines de compétences liées à la démarche scientifique, VALIDER. Il existe de nombreuses façons de considérer le problème : valider un résultat ce peut être :

- Vérifier s'il satisfait à une condition requise, comme par exemple une précision minimale ; dans ce cas, il faudra évaluer l'incertitude élargie en rapport avec un niveau de confiance exigé puis calculer la précision de la mesure et comparer celle-ci à la valeur minimale requise.
- Comparer un résultat obtenu après analyse d'une documentation scientifique ou exploitation d'une série de mesures à une valeur de référence (tabulée ou fournie par une source « incontestable ») ; le résultat est validé si l'intervalle de confiance qui lui est associé contient la valeur de référence.
- Associer à ce résultat un modèle parmi plusieurs au choix : prenons l'exemple des modèles de la diode à jonction (A : interrupteur ; B : tension de seuil ; C : résistance dynamique).



A **B** **C**

Compte tenu d'un résultat donné, il est possible que l'un ou plusieurs des modèles proposés ne permet(tent) pas de rendre compte du résultat ; il faut alors éliminer ce(s) modèle(s).

Nous laissons les lecteurs de ce document imaginer d'autres situations analogues ; elles ne manquent pas !

5. BIBLIOGRAPHIE

- Vocabulaire international de métrologie – 3ème édition
  www.bipm.org/fr/publications/guides/vim.html
  Un document complet édité par le Bureau International des Poids et Mesures ; LA référence !
- Nombres, mesures et incertitudes : document IGEN – DGESCO (mai 2010)
  http://eduscol.education.fr/cid60323/ressources-pour-le-lycee.html
  Un résumé en 12 pages des notions essentielles à connaître sur le sujet
- Mesures et incertitudes : document IGEN – DGESCO (juin 2012)
  http://eduscol.education.fr/cid60323/ressources-pour-le-lycee.html
  Un document plus complet que le précédent comportant un certain nombre d'annexes relatives à des notions mathématiques (loi normale, fonctions de plusieurs variables, …) qui permettent un approfondissement et une justification des formules utilisées dans les calculs d'incertitudes
- Activités expérimentales en physique-chimie ; enjeux de formation : rapport de l'IGEN n°2011-111
  http://eduscol.education.fr/spcfa/im_phy/activites-experimentales-en-spcfa
  Un rapport très complet sur la spécificité de notre discipline : son aspect expérimental, support à la plupart des réflexions à mener sur la qualité d'un résultat (domaine VALIDER de la démarche)
- Exemples d'activités pour l'accompagnement personnalisé en classe de Première S
  http://physique.ac-orleans-tours.fr/accompagnement_personnalise/premiere/
  Plusieurs activités concernant les incertitudes de mesure pour l'AP de Première S et un document à l'usage des enseignants rédigés par des membres du groupe ressource « Lycée » de l'académie d'Orléans-Tours : Françoise MARCADET, Gilles PREVOTAT

6. ANNEXE : EXTRAIT DE LA TABLE DES COEFFICIENTS DE STUDENT

Nb val	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	20
t_{95}	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,26	2,20	2,16	2,13	2,09
t_{99}	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,25	3,11	3,01	2,95	2,86