

Proposition de traitements dans différents contextes d'un même problème d'optimisation

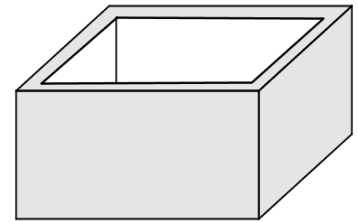
Ce problème a largement été étudié dans

*Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des Mathématiques au Lycée
Cahier spécial n° 4 de DIDIREM – Janvier 1998*

L'énoncé de référence :

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm d'épaisseur et pouvant contenir 4 m^3 . On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve.

On veut déterminer x et h pour que le volume de béton soit minimal.



La Cuve

Étude de signe par calcul formel

Niveau d'enseignement	Seconde générale (fin d'année), classe de première générale
Type d'activité	Classe par groupes avec ordinateurs accessibles
Durée	1 heure avec préparation hors classe afin de réfléchir à une stratégie de résolution. La séance en classe permet alors un débat puis une mise en œuvre.
Outils	Un logiciel de calcul formel. Les copies d'écran proposées sont obtenues à l'aide du CAS MP-Reduce de GeoGebra 4.2. Il est probable qu'au moment de la publication, celui-ci ait été remplacé par GIAC, moteur de XCAS.
Compétences mathématiques	Modélisation fonctionnelle comme outil de recherche de conjecture en première approche de la situation, Recherche du minimum par étude du signe de $f(x) - f(x_0)$ où x_0 est pressenti comme valeur donnant le minimum de la fonction f . Travail sur la forme des expressions algébriques Étude du signe d'une expression rationnelle.
Prérequis TICE	Connaissance des fonctionnalités de base d'un CAS : factorisation, déclaration de fonction, résolution d'équation ou d'inéquation
Place dans la progression, moment de l'étude	Cette activité, guidée, permet de travailler les différentes formes algébriques et de valider leur pertinence face à un objectif.
Forme(s) de calcul favorisée	Une fois la conjecture portant sur la valeur potentielle du minimum, l'élève doit établir a priori un plan d'étude. C'est uniquement grâce à ce plan d'étude que le calcul formel lui permettra d'aboutir.
Commentaires	<p>Exercice peu guidé</p> <p>Même si l'on peut envisager de traiter cette activité comme support de découverte d'un CAS, il est préférable de dissocier les tâches d'apprentissage technique de celles de pratiques <i>in situ</i>.</p> <p>L'objectif est porté sur la recherche du minimum de la fonction volume en fonction de la longueur du carré intérieur de base.</p> <p>L'étude peut s'effectuer selon l'étude du signe de $v(x) - v(2)$</p> <p>Après conjecture que 2 donne le volume minimum, on cherche à valider cette conjecture par l'étude de :</p> $f(x) := v(x) - v(2)$ $\rightarrow f(x) := \frac{5x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 80x + 16}{25x^2}$ <p>On étudie donc le signe du numérateur. La recherche de la factorisation -laissée à la charge de l'élève- fournit :</p> $\text{Factoriser}[\text{Numérateur}[(5x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 80x + 16)], x]$ $\rightarrow (5x^2 + 24x + 4)(x - 2)^2$

	L'étude du signe du premier facteur permet de conclure sur le signe du produit et donc de prouver que 2 est la valeur donnant le volume de béton minimal.
--	---

La cuve

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm d'épaisseur et pouvant contenir 4 m^3 .

1. Exprimer le volume du béton nécessaire en fonction de la largeur intérieure x de la cuve.
2. Conjecturer la valeur a du côté de la base intérieure donnant un volume minimum.
3. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, étudier le signe de $v(x) - v(a)$.
4. Quelle dimension de la largeur intérieure de la cuve le maçon va-t-il proposer à ses clients ?

