académie Orléans-Tours
direction des services départementaux de l'éducation nationale Indre-et-Loire

Semaine des Mathématiques

Du 9 au 15 mars 2020

Cycle : 3
Niveaux : 1 et 2

Situation n° 1 : « Les poignées de main »

« Poignées de main » – Certains problèmes peuvent être résolus en faisant un choix parmi plusieurs stratégies. Le problème suivant en est un exemple puisqu'on peut le résoudre par de multiples stratégies.

♦ Problème. Douze enfants s'échangent des poignées de main, chacun à un autre une seule fois. Combien de poignées de mains seront échangées ?

On proposera aux élèves de mettre en scène la situation.

On leur proposera ensuite de chercher par écrit ou avec du matériel une stratégie permettant de trouver le nombre de poignées de main.

Démarche. Voici quelques stratégies non hiérarchisées :

Stratégie 1. Écrire une phrase mathématique. ⌑ Stratégie d'application
Le 1er enfant donne 11 poignées, le 2e en donne 10, le 3e en donne 9, etc.
La phrase mathématique est : 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66. Il y a 66 poignées de main.

Stratégie 2. Faire une fausse supposition. ⌑ Stratégie d'enchaînement logique
On suppose que chaque enfant reçoit 12 poignées de main : ce qui ferait 12 × 12 ou 144 poignées. Un enfant ne peut pas se donner la main. D'où, 144 - 12 = 132 poignées. Deux mains tendues équivalent à une poignée. D'où, 132 ÷ 2 = 66 poignées.

Stratégie 3. Procéder par analogie. ⌑ Stratégie d'enchaînement logique
Un élève a déjà résolu le problème : « Huit enfants s'échangent mutuellement des cadeaux. Combien de cadeaux ont été donnés ? » Il avait fait le raisonnement suivant. Chacun des 8 enfants reçoit 7 cadeaux : ce qui fait 8 × 7 = 56 cadeaux. Si l'élève a bien évoqué le problème des poignées, il divisera le produit par 2, car il faut 2 mains pour définir une poignée. Il va donc multiplier 12 par 11 et diviser le résultat par 2 : ce qui donne 66 poignées.

Stratégie 4. Procéder par déduction. ⌑ Stratégie d'enchaînement logique
Chaque enfant donne 11 poignées. Chaque enfant en reçoit 2. On multiplie 12 par 11 et on divise par 2. Il y a 66 poignées.

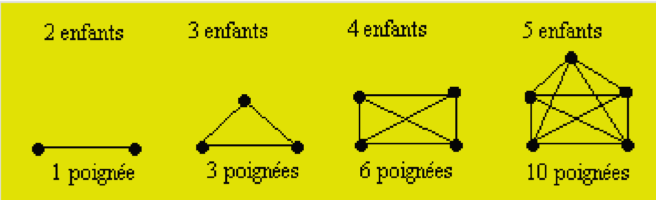
Stratégie 5. Utiliser des jetons ou des objets. ⌑ **Stratégie d'expression physique**
On prend 12 **jetons**. On y écrit 12 noms d'enfants. Pour éviter les erreurs, on procède de façon ordonnée en utilisant le comptage et le calcul. On place les jetons en ligne. On associe le premier jeton à chacun des 11 autres : cela fait 11 contacts. On associe le deuxième jeton à chacun des dix autres de droite : cela fait 10 contacts. On procède selon le même algorithme jusqu'à l'avant-dernier jeton. Il reste à faire la somme des entiers consécutifs de 1 à 11. Il y a 66 contacts ou poignées.

Si on utilise des **objets**, ils représentent les enfants. On place les objets en ligne. On procède comme dans la stratégie précédente.

Stratégie 6. Rechercher les combinaisons. ⌑ **Stratégie de recherche**
Les enfants sont notés de A à L. On écrit les combinaisons : (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (A, G), (A, H), (A, I), (A, J), (A, K), (A, L), (B, C), (B, D), (B, E), etc. On en a 11 qui commence par A, 10 par B, 9 par C, ... etc. Cela donne 66 poignées.

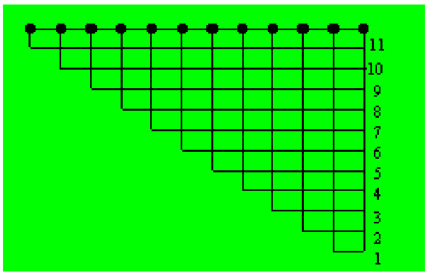
Stratégie 7. Rechercher une règle. ⌑ **Stratégie de recherche**
Par exemple, il y a 3 enfants. Chaque enfant donne et reçoit 2 poignées : ce qui fait (3 × 2)/2 ou 3 poignées. Par exemple, il y a 4 enfants. Cela fait (4 × 3)/2 ou 6 poignées. Par exemple, il y a 6 enfants. Cela fait (6 × 5)/2 ou 15 poignées. S'il y a 12 enfants, on peut écrire (12 × 11)/2 ou 66 poignées.

Stratégie 8. Construire des modèles. ⌑ **Stratégie de représentation**
On trouve le nombre de poignées successivement pour 2, 3, 4 et 5 enfants.



La différence entre le nombre de poignées du 2^{e} diagramme et du 1er est 2. La différence entre le nombre du 3^{e} diagramme et du 2^{e} est 3. La différence entre le nombre du 4^{e} diagramme et du 3^{e} est 4. À chaque fois qu'un enfant s'ajoute, le nombre de poignées augmente du nombre précédent d'enfants. D'où, les autres termes de la suite seront : 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66. Il y a 66 poignées de mains.

Stratégie 9. Construire un graphique. ⌑ **Stratégie de représentation**
Chaque enfant est représenté par un point. Les points d'intersection représentent les poignées de mains. Il reste à additionner les nombres de 1 à 11. Il y a 66 poignées de mains.



Stratégie 10. Construire un tableau. ¤ **Stratégie de représentation**

Enfants	2	3	4	5	6
Poignées	1	3	6	10	15

Pour 2 enfants, le nombre de poignées de mains est 1.
Pour 3 enfants, ce nombre est 1 + 2.
Pour 4 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3.
Pour 5 enfants, ce nombre est 1 + 2 + 3 + 4.
Pour 12 enfants, il sera : 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10 + 11 = 66.

Stratégie 11. Décomposer en sous-problèmes. ¤ **Stratégie de représentation**
On partage les enfants en deux groupes de six enfants. À l'intérieur de chaque groupe, 15 poignées sont données. Les enfants des deux groupes se donnent la main. Cela fait 6 × 6 = 36 poignées. Il y a (2 × 15 + 36) ou 66 poignées de main.

Stratégie 12. Rechercher une formule. ¤ **Stratégie de recherche**
On pose qu'il y a n enfants. Chacun donne (n - 1) poignées de mains. Cela va donner n(n - 1) poignées. Quand un enfant donne et l'autre reçoit, cela compte pour une poignée. Le nombre de poignées est 2 fois trop grand. D'où, il y a n(n - 1)/2 poignées. En remplaçant n par 12, on obtient 66.

Pour aller plus loin :

Demander aux élèves de trouver combien de poignées de main seront échangées pour 101 personnes.