

Correction de l'Épreuve officielle

Exercice n°0

Questionnaire culturel

Léonard de Pise dit Fibonacci



Éléments de biographie à compléter :

Léonard de Pise dit Fibonacci est un mathématicien italien, né vers 1170 à Pise et mort aux alentours de 1245.

Il a passé sa jeunesse en grande partie avec son père Guilielmo Bonacci, en Afrique du Nord à Béjaïa (Bougie). C'est en étudiant les méthodes de calculs indo-arabes qu'il s'initia aux mathématiques.

Il voyagea beaucoup pour le compte de son père et de marchands pisans, ce qui lui donna l'occasion de rencontrer les plus grands mathématiciens de son époque.

En 1202, il publia le « Liber Abaci », le *livre des calculs*, un traité sur les calculs et la comptabilité. Dans le premier chapitre est présentée la nouvelle numération indienne, numération de position, qui utilise les neuf symboles indiens (appelés actuellement chiffres indiens (arabes)), ainsi que le zéro qui indique qu'une position est « vacante ».

Ce système était bien plus puissant et rapide que la notation romaine et a permis de grandes avancées dans le domaine du calcul.

Le dernier chapitre traite aussi de la résolution de certaines équations du premier degré et du second degré, suivant les méthodes du célèbre mathématicien de Bagdad Al-Khawarizmi, père de l'algèbre.

Vers 1220, il présente à Frédéric II, futur empereur d'Occident, son deuxième ouvrage la « Practica geometriae » qui traite de géométrie et de trigonométrie. Son livre explique, complète et utilise les « Éléments d'Euclide ».

Léonard de Pise s'intéressa aussi beaucoup aux nombres carrés et plus particulièrement au problème des triplets pythagoriciens (trouver deux carrés dont la somme soit un carré). Ses recherches, publiées dans le « Liber Quadratorum » vers 1225, furent en partie reprises et exploitées par Pacioli trois siècles plus tard. Dans ce livre de problèmes numériques, il propose une approximation de π plus précise que celle d'Archimède. Archimède proposait $\pi \approx \frac{22}{7}$, alors que Fibonacci propose $\pi \approx \frac{864}{275}$.

Travail mathématique :

1. La suite de Fibonacci

On ne peut pas évoquer Fibonacci sans parler de la célèbre suite de nombres qui porte son nom. C'est pour décrire la croissance d'une population de lapins que Fibonacci a introduit cette suite.



On donne ci-dessous les quatre premiers nombres d'une suite de Fibonacci.

☞ Compléter par les dix nombres qui suivent :

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

Tournez la page SVP ☞

2. Problème posé par Jean de Palerme lors d'une joute mathématique en 1225 :

« Trouver un nombre carré qui, augmenté ou diminué de 5, reste toujours un nombre carré. » (Il s'agit ici de nombres rationnels).

Fibonacci donna pour solution $\left(\frac{41}{12}\right)^2$.

☞ Montrer que la réponse donnée par Fibonacci est exacte.

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$



Statue de Fibonacci, à Pise

3. Triplets pythagoriciens

Fibonacci employait une méthode originale pour trouver des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire trouver trois nombres entiers a , b et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

Par exemple : (5; 12; 13) est un triplet pythagoricien car $5^2 + 12^2 = 13^2$.

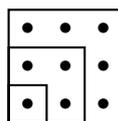
Il utilisait pour cela la propriété (connue bien avant lui) selon laquelle « la somme des n premiers entiers impairs successifs est le carré de n ».

On illustre ci-dessous la somme des premiers nombres impairs :



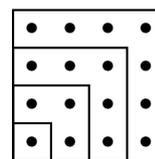
Somme des deux premiers

$$1 + 3 = 2^2$$



Somme des trois premiers

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$



Somme des quatre premiers

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Voici la méthode de Fibonacci appliquée à 9^2 :

$9^2 = 81$. On cherche à écrire 81 comme une somme d'entiers impairs successifs.

On remarque que $81 = 3 \times 27$. Donc $81 = 27 + 27 + 27 = 25 + 27 + 29$.

Or :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 15^2 \quad \text{Somme des 15 premiers impairs}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 12^2 \quad \text{Somme des 12 premiers impairs}$$

$$\text{donc par différence,} \quad 25 + 27 + 29 = 15^2 - 12^2$$

On obtient ainsi que $9^2 = 15^2 - 12^2$ soit $9^2 + 12^2 = 15^2$.

Le triplet (9; 12; 15) est un **triplet pythagoricien**.

☞ Utiliser cette méthode pour écrire 15^2 comme différence de deux carrés, et en déduire un nouveau triplet pythagoricien.

$$15^2 = 225 = 73 + 75 + 77 = 39^2 - 35^2$$

Donc $39^2 = 15^2 + 36^2$. (15 ; 36 ; 39) est un nouveau triplet pythagoricien

Autre méthode :

$$15^2 = 225 = 41 + 43 + 45 + 47 + 49 = 23^2 - 20^2$$

Donc $23^2 = 15^2 + 20^2$. (15 ; 20 ; 23) est un nouveau triplet pythagoricien

Exercice n°1**À la mode de Fibonacci**

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Exercice n°2**Jours fériés bien placés !**

1. 2002 est une année ordinaire

	1er janvier	1er mai	8 mai	15 août	1er novembre	11 novembre	25 décembre
Année ordinaire	mardi	mercredi	mercredi	jeudi	vendredi	lundi	mercredi

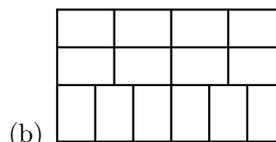
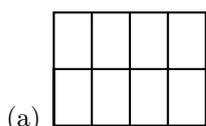
2. 2024 est une année bissextile. On examine le cas où le premier janvier est un lundi :

	1er janvier	1er mai	8 mai	15 août	1er novembre	11 novembre	25 décembre
Année bissextile	lundi	mercredi	mercredi	jeudi	vendredi	lundi	mercredi

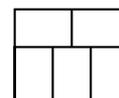
On décale ensuite les jours : il y a des années au cours desquelles aucun des jours fériés précédemment mentionnés ne tombe un samedi ou un dimanche. C'est n'est le cas que si le 1er janvier d'une année ordinaire tombe un mardi, le 1er mai, le 8 mai et le 25 décembre tombent un mercredi, le 15 août un jeudi, le 1er novembre un vendredi et le 11 novembre un lundi. S'agissant des années bissextiles, il faut que le 1er jour de l'année soit un lundi.

Exercice n°3**Sous les pavages ...**

1. Non car un carreau fait 6 cm^2 , et 15 n'est pas un multiple de 6.
 2. Les dessins sont l'échelle 1/4.



3. Les dessins sont l'échelle 1/4.



4. 11 carreaux de 6 cm^2 forment un rectangle de $11 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 66 \text{ cm}^2$.

On peut obtenir 3 rectangles différents :

- Un rectangle de dimensions $2 \text{ cm} \times 33 \text{ cm}$, et de périmètre 70 cm.
- Un rectangle de dimensions $3 \text{ cm} \times 22 \text{ cm}$, et de périmètre 50 cm.
- Un rectangle de dimensions $6 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$, et de périmètre 34 cm. C'est lui qui a le périmètre minimum.

Exercice n°4**Un exercice bien ciblé**

1. (a) On ne peut pas obtenir 21, par contre on peut obtenir 44 : $44 = 5 \times 7 + 9$

- (b) La réponse est 31.

Justification : Commençons par écrire les nombres possibles :

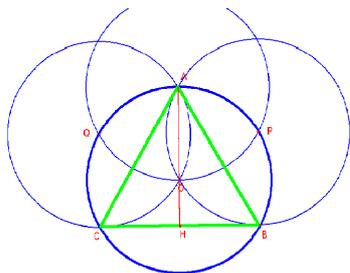
5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, ...

À partir du moment où on a obtenu 5 scores qui se suivent (de 32 à 36), on peut ajouter 5 et on aura tous les suivants.

2. Non. Si on avait 6 et 8, tous les nombres impairs seraient impossibles à atteindre.
 3. Non. Si au lieu de 5 et 9, on avait deux nombres multiples l'un de l'autre, tous les nombres qui ne seraient pas multiples du plus petit ne pourraient être atteints.
 4. Si au lieu de 5 et 9, on avait :
 (a) 5 et 7, le plus grand nombre impossible à atteindre serait 23.
 (b) 2 et 3, le plus grand nombre impossible à atteindre serait 1.

Exercice n°5**Savez-vous plier les crêpes ?**

1.



2. Pour construire le triangle équilatéral inscrit dans le cercle, il suffit de tracer un hexagone régulier ayant ses sommets sur le cercle. Cela se fait facilement en reportant 6 fois le rayon du cercle et en marquant les points sur le cercle. On obtient le triangle équilatéral en prenant un sommet sur deux de l'hexagone.

Finalemment, cela revient à faire la construction suivante :

- On choisit un point A au hasard sur le cercle \mathcal{C} .
- On trace le cercle \mathcal{C}_1 de centre A et de rayon OA .
- Ce cercle recoupe \mathcal{C} en deux points P et Q .
- On trace ensuite le cercle \mathcal{C}_2 de centre P et de rayon OA .
- \mathcal{C}_2 coupe \mathcal{C} en A et en un deuxième point que l'on nomme B .
- On trace ensuite le cercle \mathcal{C}_3 de centre Q et de rayon OA .
- \mathcal{C}_3 coupe \mathcal{C} en A et en un deuxième point que l'on nomme C .

Pourquoi les bords rabattus ne « débordent » pas du triangle équilatéral ?

Il est facile de voir que le cercle \mathcal{C} et le cercle \mathcal{C}_2 sont symétriques par rapport à (AB) car (AB) est la médiatrice de $[OP]$.

Or CAP est un triangle inscrit dans le cercle \mathcal{C} en ayant un côté pour diamètre du cercle, CAP est donc un triangle rectangle en A .

Donc le cercle de centre P et de rayon PA est tangent à la droite (CA) .

Par conséquent, le bord replié de la crêpe vient passer par le centre O et ne débord pas en A .

3. Calcul de l'aire du triangle équilatéral

Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des bissectrices donc $\widehat{OCH} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Donc $\sin \widehat{OCH} = \frac{OH}{OC}$ donc $\sin 30^\circ = \frac{OH}{10 \text{ cm}}$ donc $OH = 10 \text{ cm} \times \sin 30^\circ = 5 \text{ cm}$

Et par conséquent $AH = 10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$.

On a aussi $\cos \widehat{OCH} = \frac{CH}{OC}$ donc $\cos 30^\circ = \frac{CH}{10 \text{ cm}}$ donc $CH = 10 \text{ cm} \times \cos 30^\circ \approx 8,66 \text{ cm}$

Et par conséquent $BC \approx 17,32 \text{ cm}$

Donc $\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} \approx \frac{17,32 \times 15}{2} \approx 129,9 \text{ cm}^2$

Autre méthode pour calculer l'aire du triangle rectangle :

O est le centre de gravité du triangle ABC donc $OH = \frac{AO}{2} = 5 \text{ cm}$ et donc $AH = 15 \text{ cm}$.

Donc dans le triangle BOH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore, on a :

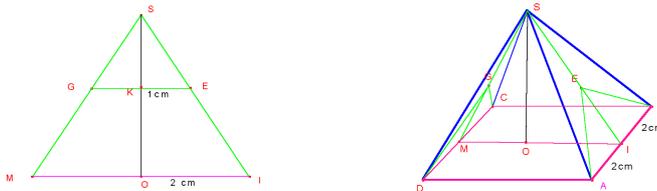
$BO^2 = BH^2 + OH^2$ donc $10^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 5^2$ donc $BC = 10\sqrt{3} \text{ cm}$.

Donc $\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} \approx \frac{10\sqrt{3} \text{ cm} \times 15 \text{ cm}}{2} \approx 129,9 \text{ cm}^2$

L'aire du triangle équilatéral est de environ 129,9 cm².

Exercice n°6**De quoi prendre de la hauteur**

Soit O le centre de la base. On peut schématiser la situation par les deux figures ci-dessous.



1. • On calcule d'abord IE :

Comme les 4 triangles sont superposables et reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en E, F, G et H . Donc E et S sont sur la médiatrice de $[AB]$ et donc (ES) est la médiatrice de $[AB]$. Donc comme I est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABE , I est équidistant des 3 sommets et donc $IE = 2$ cm.

Autre possibilité pour calculer IE :

Comme les 4 triangles reforment la base, ce sont tous des triangles rectangles isocèles en E, F, G et H .

Donc $AB^2 = AE^2 + BE^2$ donc $4^2 = 2 \times AE^2$ donc $AE = 2\sqrt{2}$ cm.

En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle IEA , on a :

$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + IE^2 \quad \text{donc} \quad IE = 2 \text{ cm.}$$

- On applique la propriété de Thalès dans le plan (SMI) :

$$\frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SI} = \frac{KE}{OI} \quad \text{donc} \quad \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SI} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SE+2} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad SE = 2 \text{ cm.}$$

- Donc $SI = SE + EI = 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

La hauteur du triangle SAB est de 4 cm.

2. La construction du patron ne présente pas de difficulté particulière.

$$SA = SB = SC = SD = \sqrt{2^2 + 4^2} \text{ cm soit environ } 4,5 \text{ cm.}$$

3. Il faut appliquer la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle SOI .

$$4^2 = 2^2 + SO^2 \quad \text{donc} \quad SO^2 = 12 \quad \text{donc} \quad SO = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

La hauteur de la pyramide est $2\sqrt{3}$ cm.

Exercice n°7**Poisson³**

1. Le volume d'eau lorsque le niveau de celle ci est 0,5 dm est $(3 - 0,5^2) \times 0,5 = 1,375$ litre.

(a) Puisque $1 < 1,375$, le niveau est inférieur à 0,5 dm : une partie du cube émerge. Soit h le niveau de l'eau en dm, on a $1 = (3 - 0,5^2) \times h$, soit $h = \frac{1}{3-0,5^2} = \frac{4}{11} \approx 3,6$ cm.

(b) Puisque $1,5 > 1,375$, le niveau est supérieur à 0,5 dm : le cube est totalement immergé. Soit h la hauteur d'eau, on a : $3 \times h = 0,5^3 + 1,5$ (en décomposant le volume total comme somme du volume du cube et du volume d'eau), d'où $h = \frac{1,625}{3} \approx 5,4$ cm.

2. Soit x le côté du cube en dm, on distingue deux cas :

soit le cube est totalement immergé ($x < 1,5$), soit une partie émerge ($x \geq 1,5$).

Supposons $x < 1,5$, alors $3 \times 1,5 = 3 + x^3$ d'où $x^3 = 1,5$. Ainsi $x \approx 1,1$ dm.

Supposons $x \geq 1,5$, alors $3 = 1,5 \times (3 - x^2)$ d'où $x = 1$. Solution à rejeter car on est dans le cas où $x \geq 1,5$.

3. Soit x le côté du cube en dm, on a : $1,5 = (3 - x^2) \times x$ soit $-x^3 + 3x - 1,5 = 0$.

D'après la représentation graphique de la fonction définie sur $[0,2]$ par $x \mapsto -x^3 + 3x - 1,5$, on trouve deux solutions ; l'une dans l'intervalle $[0,5;0,6]$ et l'autre dans $[1,3;1,4]$.

Exercice n°8**Que celui qui le peut ...**

On doit résoudre le système indéterminé suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100 \end{cases}$$

ce qui donne, après quelques transformations $\begin{cases} y = \frac{400 - 5z}{2} \\ x + y + z = 100 \end{cases}$ qui livre 6 réponses :

z (enfants)	68	70	72	74	76	78	80
y (femmes) $(400 - 5z)/2$	30	25	20	15	10	5	0
x (hommes) $(100 - z - y)$	2	5	8	11	14	17	20