<u>Un point d'histoire pour deux notations …</u>

(Références : «Des tangentes aux infiniment petits » - IREM de Poitiers -1998)

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a, les mathématiciens emploient la notation $f'(a)$ due au mathématicien français Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813).

Les physiciens privilégient la *notation différentielle* introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716), dans son traité « *Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes …*».

Pourquoi ces divergences ? Pour répondre à cette interrogation, un point d'histoire est nécessaire …

Historiquement, la notion de dérivée découle de celle de différentielle.

Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressaient à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi ARCHIMÈDE ($-287, -212$) propose une construction de la tangente en un point d'une spirale. Mais, il faut attendre la première moitié du XVIIème siècle avec DESCARTES, FERMAT et ROBERVAL, pour voir apparaître des méthodes plus générales de détermination de tangentes. Ces méthodes donneront naissance au *calcul différentiel* développé séparément par LEIBNIZ et par le mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac NEWTON (1642-1727).

Voici la « définition » que donne l'*Encyclopédie Méthodique* de DIDEROT et D'ALEMBERT (écrite entre 1751 et 1772).

> **Différentielle, adj**.
> On appelle dans la haute Géométrie, quantité différentielle ou simplement différentielle, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable.
> On l'appelle différentielle ou quantité différentielle, parce qu'on la considère ordinairement comme différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu. NEWTON et les anglais l'appellent fluxion, à cause qu'ils la considèrent comme l'accroissement momentané d'une quantité. LEIBNITZ (*) et d'autres l'appellent aussi une quantité infiniment petite.
> Calcul différentiel ; c'est la manière de différentier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable.
> Cette méthode est l'une des plus belles et des plus fécondes de toutes les Mathématiques ; M. LEIBNITZ qui l'a publiée le premier, l'appelle calcul différentiel, en considérant les grandeurs infiniment petites comme les différences des quantités finies ; c'est pourquoi il les exprime par la lettre d qu'il met au devant de la quantité différentiée ; ainsi la différentielle de x est exprimée par dx, celle de y par dy, etc.
> M. NEWTON appelle le calcul différentiel, méthode des fluxions, parce qu'il prend, comme on l'a dit, les quantités infiniment petites pour des fluxions ou des accroissements momentanés. Il considère, par exemple, une ligne comme engendrée par la fluxion d'un point, une surface par la fluxion d'une ligne, un solide par la fluxion d'une surface ; et au lieu de la lettre d, il marque les fluxions par un point mis au dessus de la grandeur différentiée. Par exemple, pour la fluxion de x, il écrit $\dot{x}$, pour celle de y, $\dot{y}$ etc. C'est ce qui fait la seule différence entre le calcul différentiel et la méthode des fluxions…

(*) D'Alembert écrit LEIBNITZ plutôt que LEIBNIZ.

Si les travaux de NEWTON sont remarquables, ce sont ceux de LEIBNIZ qui ont prévalu en mathématiques et en physique grâce aux notations plus adaptées.

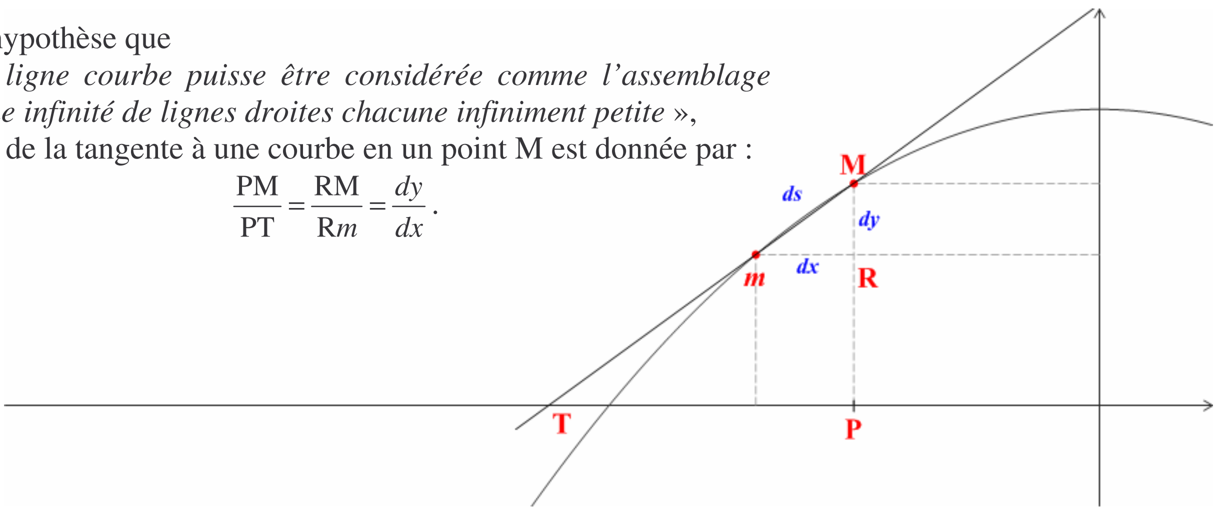
Le calcul différentiel apparut d'emblée pour les mathématiciens et les physiciens comme un outil puissant. Avec des règles de calcul relativement simples, il permit en premier lieu de répondre aux questions des Grecs, en trouvant des équations d'une tangente à une courbe.

Sous l'hypothèse que

« la ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites chacune infiniment petite »,

la pente de la tangente à une courbe en un point M est donnée par :

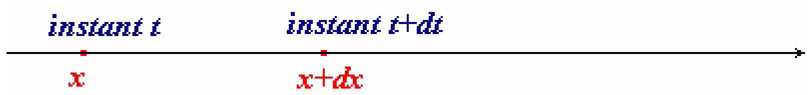
$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{R}m} = \frac{dy}{dx}.$$



Le calcul différentiel permit alors aux physiciens de déterminer la vitesse d'évolution d'un phénomène.

Considérons par exemple le mouvement d'un mobile se déplaçant sur une droite.

À un instant t, le mobile se trouve à une abscisse x.



Si on considère une distance infiniment petite dx correspondant à un temps infiniment petit dt, la vitesse instantanée à l'instant t s'exprime par $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$.

Ainsi, si l'on connaît la courbe d'évolution de x en fonction du temps, la vitesse à un instant donné sera le coefficient directeur de la tangente au point considéré.

Le XVIIIème siècle voit s'élargir le champ d'application du calcul différentiel. Cependant, en raison du statut imprécis des quantités infinitésimales et du recours à l'intuition en géométrie, confusion et polémiques règnent encore au sujet des fondements du calcul différentiel. La déclaration du savant, homme politique et Général Lazare CARNOT (1753-1823) témoigne du malaise de l'époque au sujet des infiniment petits :

« On n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant ».

Des mathématiciens tentèrent alors de clarifier les notions de base en les dégageant de tout ce que le concept d'infiniment petit traîne avec lui de références métaphysiques.

LAGRANGE l'exprime explicitement, en 1797, dans le développement du titre de son ouvrage :

Théorie des fonctions analytiques

Contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Ce n'est qu'au XIXème siècle que les analystes remplacent les vagues concepts d'infiniment petits par des notions solides et rigoureuses, fondées sur des quantités finies. Le mathématicien français Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) définit avec précision la limite. Son cours donné à l'École Polytechnique devient la référence de l'analyse. Il faudra attendre le XXème siècle pour que les quantités infinitésimales soient complètement légitimées.

Plaidoyer pour l'écriture différentielle dans nos classes …

La notation différentielle est particulièrement adaptée au calcul des dérivées.

Comment peut-on noter, par exemple, la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$?

Bien sûr, l'écriture $\sin'(\omega t + \varphi)$ ne convient pas. Elle correspond en effet au nombre dérivé de la fonction sinus au point $\omega t + \varphi$. Autrement dit, on a $\sin'(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$, pour tout réel *t*.

On touche ici un point délicat. La confusion entre $(f \circ u)'$ et $f' \circ u$ est en effet très fréquente chez les élèves. Peut-on pour autant tolérer l'écriture $(\sin(\omega t + \varphi))'$? Théoriquement non !

Le professeur de mathématiques préfère donner un nom à la fonction que l'on dérive. En notant f la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$, il écrit $f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Le professeur de physique privilégie la notation différentielle $\dfrac{d}{dt}\sin(\omega t + \varphi)$. Cette notation enlève toute ambiguïté. Elle exprime en effet clairement que l'on dérive ici la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Prenons l'exemple de l'étude d'un condensateur de capacité C. Notons u_{C} la tension aux bornes.

De la formule $q = \mathrm{C}\, u_{\mathrm{C}}$, on déduit $i = \dfrac{dq}{dt} = \mathrm{C}\dfrac{du_{\mathrm{C}}}{dt}$.

Avec une tension donnée par $u_{\mathrm{C}} = \mathrm{U}_m \cos(\omega t + \varphi)$ (où U_m, ω et φ sont des constantes), on obtient alors, sans ambiguïté de notation : $i = \mathrm{C}\dfrac{du_{\mathrm{C}}}{dt} = \mathrm{C}\,\mathrm{U}_m \dfrac{d}{dt}(\cos(\omega t + \varphi)) = -\mathrm{C}\,\mathrm{U}_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Pratique ! **Mais le calcul précédent ne va pas de soi pour nos élèves, s'il n'est pas éclairé par des règles mathématiques précises. C'est donc au professeur de mathématiques de prendre en charge son apprentissage, dans le souci de renforcer la cohérence entre les disciplines scientifiques.**

L'exercice suivant fournit l'occasion d'un travail sur l'écriture différentielle, en mathématiques.

« La vitesse d'une onde de longueur L ($\mathrm{L} > 0$) en eau profonde est donnée par $v = k\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}} + \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$, où k et C sont des constantes strictement positives. Pour quelle longueur L cette vitesse est-elle minimale ? ».

Si on ne dispose pas, en début d'année, de la dérivée d'une fonction de type $\sqrt{u}$, on peut s'intéresser (en le justifiant) au maximum de v^2.

L'écriture différentielle permet, à chaque étape du calcul, de bien mettre en évidence le statut des différentes lettres et d'éviter le recours à des écritures du type $\left(\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}\right)'$, dénuées de sens.

Calcul	Justification
$\dfrac{dv^2}{d\mathrm{L}} = k^2 \dfrac{d}{d\mathrm{L}}\left(\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}} + \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}\right)$	k^2 est une constante multiplicative
$\dfrac{dv^2}{d\mathrm{L}} = k^2\left(\dfrac{d}{d\mathrm{L}}\left(\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}\right) + \dfrac{d}{d\mathrm{L}}\left(\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}\right)\right)$	Dérivation d'une somme
$\dfrac{dv^2}{d\mathrm{L}} = k^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{C}}\dfrac{d}{d\mathrm{L}}(\mathrm{L}) + \mathrm{C}\dfrac{d}{d\mathrm{L}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{L}}\right)\right)$	C et $\dfrac{1}{\mathrm{C}}$ sont des constantes multiplicatives
$\dfrac{dv^2}{d\mathrm{L}} = k^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{C}} \times 1 + C \times \left(-\dfrac{1}{\mathrm{L}^2}\right)\right)$	Dérivation des fonctions usuelles $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{L}$ et $\mathrm{L} \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{L}}$
$\dfrac{dv^2}{d\mathrm{L}} = k^2\left(\dfrac{\mathrm{L}^2 - \mathrm{C}^2}{\mathrm{C}\mathrm{L}^2}\right)$	Mise sous la forme d'un quotient pour obtenir le signe ...

« Δx » et « $d x$ » … **(d'après un travail réalisé dans l'académie de Nantes)**

En physique, les élèves travaillent souvent sur des accroissements de quantités, notés avec la lettre Δ.

Si on étudie l'évolution d'une quantité x en fonction du temps t, l'accroissement Δx de cette quantité entre les instants t et $t+\Delta t$ est approximativement égal à $x'(t)\,\Delta t$.
De plus, cette approximation est d'autant « meilleure » que Δt est « petit ».
A partir de mesures expérimentales, on peut donc déterminer une valeur approchée de $x'(t)$:

$x'(t) \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, dès lors que Δt est jugé « suffisamment petit ».

Dans cette écriture, Δx et Δt sont des nombres réels.

Quant aux dx et dt que l'on rencontre dans l'écriture différentielle $x'(t) = \dfrac{d\,x}{d\,t}$:

il faut que les élèves sachent qu'ils ne doivent considérer *dx* et *dt* que comme une simple écriture correspondant à des objets mathématiques qui seront définis après le baccalauréat.

De même, en mathématiques :

l'écriture $\dfrac{d\,y}{d\,t} = \dfrac{d\,y}{d\,x} \times \dfrac{d\,x}{d\,t}$ n'est qu'un moyen mnémotechnique de retrouver la dérivée d'une fonction composée, et en aucun cas un calcul sur des nombres réels, dans lequel on aurait effectué une simplification par dx.

Vitesse et accélération…

Un exercice bien choisi permet en début d'année de **réinvestir la vitesse instantanée introduite en première S, l'accélération permettant alors de motiver l'introduction de la dérivée seconde.**

Exercice. Un point M mobile se déplace sur un axe d. On étudie son mouvement sur l'intervalle de temps $[0;4]$. Son abscisse à l'instant t est donnée par $x = -t^3 + t^2 + 8t$.

a) Etudier la fonction $f : t \mapsto -t^3 + t^2 + 8t$. Décrire le mouvement du point M sur la droite d.

b) La vitesse du point M à l'instant t est donnée par $v(t) = f\,'(t)$.
L'accélération du point M à l'instant t est donnée par $\gamma(t) = v'(t)$.
Calculer la vitesse $v(t)$ et l'accélération $\gamma(t)$ du mobile à l'instant t.
A quel instant la vitesse du point M est-elle maximale ? Quelle est alors son accélération ?

c) Construire sur un même graphique les courbes représentant la position du point M, sa vitesse et son accélération.

d) Le mouvement est dit accéléré sur un intervalle de temps I, lorsque $v(t)$ et $\gamma(t)$ sont de même signe pour tout $t \in \mathrm{I}$. Déterminer les intervalles de temps sur lequel le mouvement est accéléré.

C'est l'occasion d'introduire la dérivée seconde de la fonction f …
C'est aussi l'occasion de travailler l'écriture différentielle.

- Si x est une distance fonction du temps, $x = f(t)$:

  l'écriture $f\,'(t) = \dfrac{d\,x}{d\,t}$ met en évidence le fait que $f\,'(t)$ est une vitesse.

- Si on note v cette vitesse :

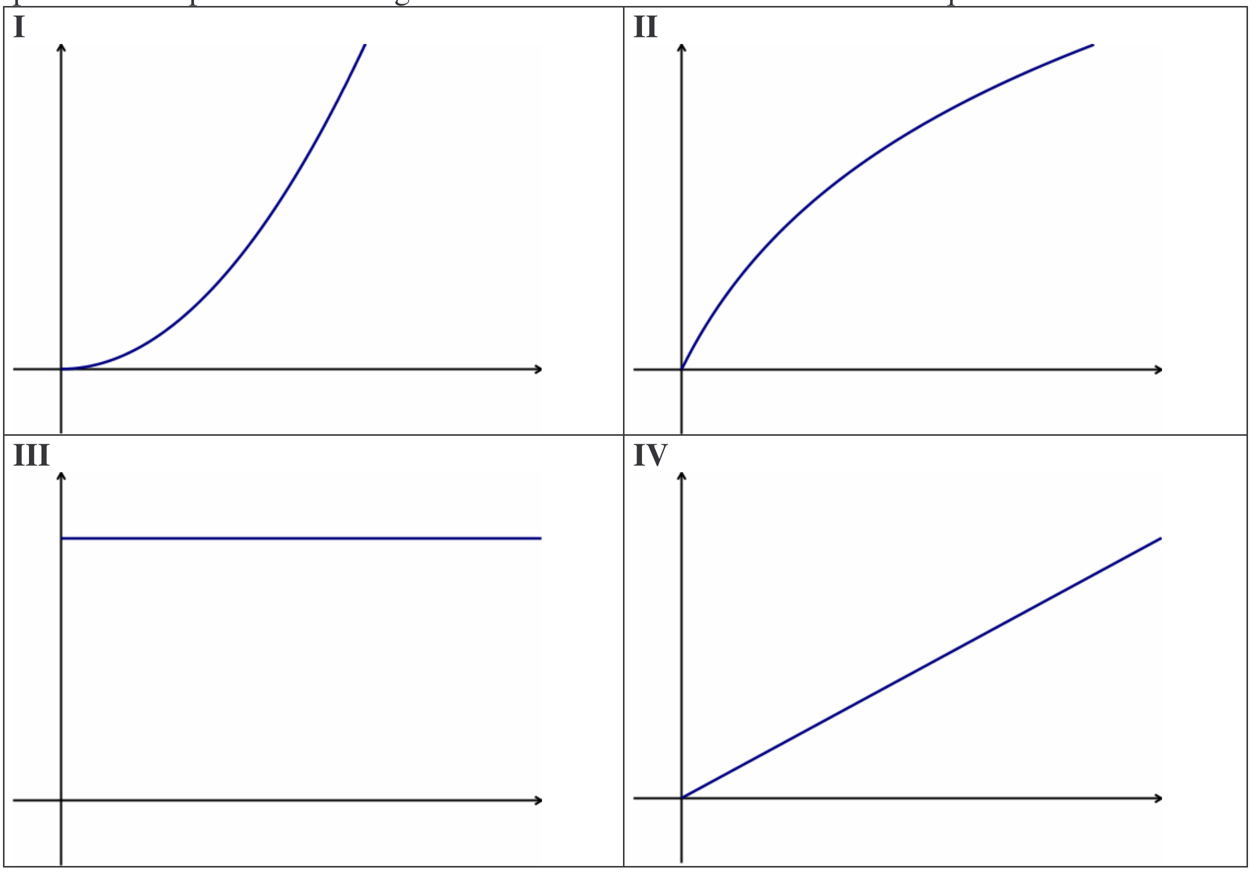
  l'écriture $f\,''(t) = \dfrac{d\,v}{d\,t}$ (ou encore $\dfrac{d^{\,2}x}{d\,t^2}$) met en évidence le fait que $f\,''(t)$ est une accélération.

Pour le calcul de la vitesse en l'instant t_0, on peut rencontrer l'écriture $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{(t=t_0)}$.

De même l'accélération en t_0 peut être notée $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{(t=t_0)}$.

L'exercice qui suit permet de **compléter l'apprentissage par des lectures graphiques**.

Chacun des graphiques ci-dessous donne la position, en fonction du temps, d'un wagonnet pouvant se déplacer sur une ligne droite. L'échelle est la même dans les quatre cas.



Parmi ces wagonnets, quel est celui ou quels sont ceux qui ont :

a) la plus grande vitesse initiale ?

b) une vitesse à tout instant nulle ?

c) une vitesse constante ?

d) une accélération à tout instant nulle ?

e) une accélération à tout instant strictement positive ?

f) une accélération à tout instant strictement négative ?