LA SYMETRIE AXIALE

DE L'ECOLE AU LYCEE

Document de synthèse du travail conduit

pendant les journées d'animation pédagogique

destinées aux coordonnateurs des collèges de l'académie d'Orléans-Tours

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

Année scolaire 2001-2002

Ce document comporte 25 pages auxquelles il faut ajouter 17 pages d'annexes

(Document modifié en septembre 2005)

PLAN DU DOCUMENT

1. Présentation
   1.1. Objectifs du présent article
   1.2. Le point de vue adopté

2. Eléments à prendre en compte
   2.1. La symétrie axiale à l'école
   2.2. La symétrie axiale à l'entrée en 6e
   2.3. La symétrie axiale dans le programme de 6e
   2.4. La symétrie axiale dans les manuels de 6e
   2.5. Le point de vue mathématique
   2.6. Le point de vue « vertical » dans les programmes de l'école au lycée

3. La progression proposée
   3.1. Présentation
   3.2. Explicitation de certains choix
   3.3. Le chapitre 2 : « Des points et des figures »
   3.4. Le chapitre 8 : « Symétrie axiale »
   3.5. Le chapitre 12 : « Etude de figures »

4. Des situations de classe
   4.1. Une activité de première rencontre avec la notion de démonstration
   4.2. Des exercices et devoirs pour réinvestir la médiatrice
   4.3. Des figures à main levée
   4.4. Des exercices pour raisonner
   4.5. Des résumés de cours concernant les principales constructions

Annexes

Annexe 1 : la progression annuelle
Annexe 2 : trame du chapitre "Des points et des figures"
Annexe 3 : activité "Un rectangle et deux cercles"
Annexe 4 : un devoir à la maison (Le trésor de l'île aux Requins)
Annexe 5 : trame du chapitre "Symétrie axiale"
Annexe 6 : activité "Les taches"
Annexe 7 : activité figures à main levée
Annexe 8 : activité "Conservations et non conservations"
Annexe 9 : interrogation sur la symétrie axiale
Annexe 10 : un devoir à la maison (aire, périmètre et symétrie axiale)
Annexe 11 : activité d'approche de la notion d'axe de symétrie d'une figure
Annexe 12 : document de synthèse sur constructions et cerf-volant
Annexe 13 : étude du losange
Annexe 14 : étude du triangle isocèle

1. Présentation

1.1. Objectifs du présent article

Cet article vise à fournir une synthèse du travail effectué sur la symétrie axiale lors des huit journées d'animation pédagogique qui ont réuni successivement les coordonnateurs de mathématiques des différents départements de l'académie.

Cette synthèse apparaît utile pour plusieurs raisons. D'abord l'exposé et les travaux en atelier ont varié d'une réunion à l'autre ; chacun pourra donc trouver ici l'essentiel du travail fourni au cours de la journée à laquelle il a participé mais aussi celui des sept autres journées. Ensuite les coordonnateurs pourront trouver dans cette trace écrite un support bienvenu pour faciliter leur tâche de démultiplication au sein des équipes d'établissements. Enfin ce document permettra à chacun de disposer de supports exploitables pour nourrir sa réflexion personnelle et parfois même pour travailler directement en classe.

1.2. Le point de vue adopté

Comme dans l'exposé présenté lors des réunions, une part importante de ce document sera consacrée à la présentation d'une proposition d'enseignement de la symétrie axiale en 6e. Cette proposition vise clairement à montrer l'existence possible d'un plan d'enseignement annuel en accord avec les réflexions présentées au préalable. Elle ne doit donc en aucune manière être considérée comme un modèle à suivre mais au contraire comme une base de réflexion dont on peut retenir certains éléments et en refuser d'autres.

Construire une progression annuelle amène inévitablement à opérer des choix qui doivent conduire chacun d'entre nous à mener une réflexion puis à nous engager dans l'action en respectant certaines conceptions de l'enseignement.

Ces conceptions apparaîtront ici sur des points comme :

- La nature spiralée de la progression
- La place et la forme des révisions
- La place réservée au raisonnement dans les exercices mais aussi dans le cours, en particulier pour justifier les techniques employées

- Le recours à des dispositifs d'enseignement variés, de l'activité ouverte à l'exposé magistral
- La mise en place volontariste de devoirs à la maison
- Une gestion de l'hétérogénéité reposant aussi souvent que possible sur des activités pouvant être exploitées à des niveau cognitifs successifs
- Le soucis de présenter le savoir nouveau dans des situations problématisées où ce savoir apparaîtra indispensable, ce qui légitimera son apparition
- Le souci de travailler sur le fond et les concepts avant de travailler sur la forme ou les techniques.

2. Eléments à prendre en compte

2.1. La symétrie axiale à l'école

La symétrie axiale apparaît dans les programmes dès le cycle 2 (classes de dernière année de maternelle, CP et CE1) : « Approche de la symétrie axiale (pliages). »
Il s'agit d'abord de pratiques expérimentales liées au pliage qui permettent cependant de créer des images mentales exploitées notamment sur papier quadrillé. L'évaluation d'entrée en CE2 de septembre 2001 testait d'ailleurs la compétence qui consiste à compléter une figure polygonale par symétrie axiale, avec référence au pliage, sur un quadrillage, l'axe utilisé étant une droite « horizontale » du quadrillage.

Au cycle 3 (classes de CE2, CM1 et CM2), ce travail se prolonge : « Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie... vérifier qu'une droite est axe de symétrie d'une figure... compléter une figure par symétrie axiale... tracer la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée...»
On notera que la symétrie axiale prend place ici dans un cadre de travail plus large, toujours lié au dessin et donc à l'expérimental, mais qui inclut également les situations d'agrandissement et de réduction. Les techniques à mettre en oeuvre restent expérimentales : pliage, papier calque, papier quadrillé, miroir. La construction du symétrique d'un point avec les instruments de géométrie est hors programme.

Le programme actuellement en vigueur au cycle 3 date de 2002 (BO spécial N°1 du 14 février 2002). Il est nettement plus précis que celui qui précèdait et il fixe clairement les limites entre objectifs poursuivis à l'école et objectifs relevant du collège.

2.2. La symétrie axiale à l'entrée en 6e

L'évaluation d'entrée en 6e permet de poser un premier diagnostique sur l'état du savoir des élèves concernant la symétrie axiale. Celle de septembre 2000 avec quatre items consacrés à ce sujet permet ainsi d'effectuer les constats suivants :

- Les élèves repèrent bien les axes de symétrie lorsque ceux-ci sont parallèles à un bord de la feuille : 70,4% de réussite à l'item 42
- Mais cette réussite fléchit dès que les axes ne sont plus dans les directions privilégiées précédentes : 50,7% de réussite seulement à l'item 43
- Enfin seuls 58,2% des élèves repèrent correctement les axes de symétrie d'une figure aussi familière que l'est le rectangle. Les diagonales jouent ici un rôle fortement perturbateur.

Plus généralement, le professeur de 6e doit retenir que la symétrie axiale est un objet de travail ancien pour ses élèves. Cette situation présente des avantages car les élèves possèdent des acquis sur lesquels on peut s'appuyer :

- Des pratiques expérimentales génératrices de nécessaires images mentales
- Les tracés sur quadrillage, les axes en jeu étant des lignes de ce quadrillage
- La perception de la conservation des formes et des grandeurs

Mais elle présente aussi des inconvénients liés d'abord à l'hétérogénéité des pratiques observées, par exemple au travers des manuels de CM2. On peut cependant pronostiquer que cette hétérogénéité va s'amoindrir progressivement lorsque le programme actuel, présenté plus haut, sera complètement installé ce qui n'est encore le cas aujourd'hui.

Le travail sur la symétrie axiale en 6e constituera donc une reprise d'étude. Il s'agira d'exploiter au mieux les acquis non négligeables dont disposent les élèves tout en étant conscient que certaines conceptions erronées sont déjà installées pour certains, ce qui nécessitera de lutter contre des obstacles classiques parmi lesquels on peut citer :

- L'axe conçu comme séparateur du plan (favorisé par le miroir si on ne prend pas soin de fournir aux élèves un matériel adéquat). Les élèves concernés par cet obstacle sont fortement perturbés lorsqu'on leur propose de construire le symétrique d'une figure qui est coupée par l'axe de la symétrie
- La prégnance des directions privilégiées qui sont celles des bords de la feuille (ce qui influe fortement sur la reconnaissance d'axes et sur la construction de figures symétriques)

2.3. La symétrie axiale dans le programme de 6e

Rappelons rapidement, car les enjeux principaux concernant la symétrie axiale sont ailleurs, que les compétences exigibles s'organisent autour des points suivants :

- Tracés de symétriques de figures incluant des cas où l'axe coupe la figure
- Tracés d'axes
- Médiatrice et bissectrice
- Etude de figures à l'aide de la symétrie axiale : triangles isocèle et équilatéral, losange, rectangle, carré

En fait le programme de 6e assigne au travail sur la symétrie axiale des objectifs bien plus vastes. La symétrie axiale constitue un point fort de ce programme. Elle permet de faire vivre un grand thème : celui du raisonnement géométrique. Sur ce point une progression transparaît dans les programmes :

① Partir du travail expérimental effectué à l'école (à renforcer) **② Mettre en évidence des propriétés (perception, explicitation, formalisation)**	‖ →	***Géométrie perceptive ou instrumentée***
③ Appliquer à des constructions **④ Etudier mathématiquement des figures**	‖ →	***Géométrie déduite***

Sont regroupées ici sous le vocable géométrie perceptive ou instrumentée toutes les pratiques classiques de l'école qui consistent pour les élèves à appréhender globalement et perceptivement les figures mais aussi celles qu'on rattache souvent à une géométrie mesurée ou instrumentée, et qui consiste par exemple à vérifier qu'un quadrilatère est un carré en recourant à certains instruments de géométrie. Dans les deux cas, il s'agit de pratiques se

rattachant au dessin, objet concret, qui se distinguent donc des pratiques de la géométrie déduite qui, elles, se centrent sur des figures idéales, immatérielles et sur des énoncés.

Un tel passage du perceptif instrumenté au déductif constitue évidemment une avancée cognitive considérable qui nécessitera un étalement sur toute la durée du collège. Cependant en 6e si ce passage ne peut apparaître comme un objectif définitivement acquis en fin d'année, un travail consistant est impératif qui nécessitera des reprises, des situations intermédiaires avec des niveaux de preuves différents, une prise en compte de l'hétérogénéité des élèves… Pour cet objectif à long terme, une progression spiralée apparaît comme une organisation particulièrement adaptée. Cette progression devra également prendre en charge le moment de reprise de l'étude engagée à l'école et donc intégrer ces révisions dont on sait maintenant que, pour être efficaces, elles doivent se faire « autrement » et ouvrir des perspectives nouvelles sur des objectifs nouveaux.

Signalons pour conclure que si le programme fixe des objectifs ambitieux en terme de raisonnement, il ne mentionne pas aussi nettement que le précédent que la symétrie axiale constitue un outil pour étudier mathématiquement des figures. Il rappelle, comme le précédent, que pour des élèves de cet âge décrire et construire des figures reste un objectif essentiel.

Il est clair cependant que sur ce dernier point on ne vise pas l'apprentissage de recettes permettant de réaliser de belles figures. Ceci aurait deux effets pervers majeurs :

- Un effet d'ordre général tendant à renforcer certains élèves dans leur conception très réductrice des mathématiques, qu'ils voient comme un ensemble de règles à appliquer.
- Un effet particulier sur l'apprentissage du raisonnement, par la focalisation de l'attention des élèves sur ce dessin qui fait déjà obstacle à l'installation du raisonnement.

En revanche on vise au travers des constructions demandées aux élèves, la mise en jeu des propriétés géométriques nécessaires à la réalisation de la figure. Finalement, c'est bien un travail sur le raisonnement qu'on conduit ainsi. Les propositions qui suivent se placent dans cet esprit en motivant fréquemment le recours au raisonnement par un besoin de décrire ou construire une figure.

2.4. La symétrie axiale dans les manuels de 6e

Le tableau des deux pages suivantes présente quelques caractéristiques de manuels de 6e concernant le thème de la symétrie axiale. Il indique notamment :

- Le nombre de chapitres concernés et la place de ces chapitres dans l'ordre d'apparition (par exemple le manuel Triangle comporte un chapitre consacré à la symétrie axiale et il s'agit du chapitre n°11 sur les quinze que le manuel contient). Ces deux caractéristiques sont évidemment à mettre en relation avec la recherche annoncée plus haut d'une progression spiralée permettant d'étendre l'étude de la symétrie axiale sur une durée maximale.
- L'ordre de présentation des trois éléments clefs de la progression que sont la médiatrice, les figures symétriques et la notion d'axe de symétrie d'une figure.
- Une description des contenus abordés à propos de la médiatrice et leur ordre d'apparition.

Enfin la dernière ligne du tableau fait apparaître les caractéristiques de la proposition qui sera faite plus loin.

L'élément le plus marquant de cette étude semble être encore une fois la grande diversité des approches offertes par ces manuels. Ainsi le nombres de chapitres concernés, leur position, la progression choisie, la place réservée au raisonnement sont tous des éléments traités de façon très diverses. Certains manuels ne sont d'ailleurs pas conformes au programme officiel pour ce qui concerne la place réservée au raisonnement, en particulier sur l'étude de figures à l'aide de la symétrie axiale.

Une telle diversité tient vraisemblablement pour beaucoup à la spécificité de la classe de 6e. D'une part, le raisonnement déductif y fait une apparition progressive et sa place n'y est pas quantifiée à priori. D'autre part, la progression de l'admis vers le déduit qui s'opère au cours de l'année offre beaucoup de souplesse dans l'ordre de présentation des différents éléments du savoir à enseigner. En effet les choix effectués en début d'année des éléments admis déterminent la progression qui suivra. Dès la classe de 5e cette progression annuelle sera davantage imposée par l'enchaînement mathématique des différentes notions abordées.

Que retenir de cette étude pour l'utilisation du manuel dans la classe ? Sans doute que pour réaliser les objectifs affichés précédemment, le professeur devra prendre une certaine distance avec le manuel de la classe. Cependant cette diversité des manuels constitue pour le professeur une certaine richesse. Il disposera ainsi d'une base documentaire importante pour ce qui concerne les exercices et les diverses progressions possibles.

Quelques caractéristiques de 7 manuels de 6e à propos de la symétrie axiale

(1) Ordre de présentation :
- *a* : médiatrice
- *b* : figures symétriques
- *c* : axe de symétrie d'une figure

(2) Travail sur la médiatrice
- *a* : droite perpendiculaire passant par le milieu
- *b* : points équidistants de 2 points distincts
- *c* : formalisation du lien précédent (propriété et réciproque)
- *d* : axe de symétrie d'un segment
- *e* : définition de 2 points symétriques

Manuel	Nb de chapitres	Place ds la prog	Ordre (1)	Médiatrice (2)	Constr justifiées	Réinvestissements déductifs	Remarques
Triangle	1	11/15	*b et c* *a*	*a* *d*	NON		1) Figures à main-levée 2) Contrôle et obstacles
Pythagore	5	4/17 6/17 10/17 12/17 17/17	*a* *b* *c*	*b* *a* *e*	Par-tiel (sym. d'1 pt)	Triangles et losange Rectangle Cercle	1) Points invariants 2) Exercices mettant en jeu un raisonnement
Transmath	4	3/15 5/15 7/15 9/15	*b* *c* *a*	*a et d* *b*	Par-tiel (sym. d'1 pt)	Angles et triangles Rectangles et losanges	1) qq exercices de contrôle et qq figures à main-levée 2) Exercices mettant en jeu un raisonnement

Bordas	2	11/14 13/14	*c* *a* *b*	*d* *a* *b* *e*	NON	Axes admis Propriétés justifiées ensuite	Nombreux ex de construction appelant des justifications (médiatrice, rédaction, espace, aire et périmètre, repérage …)
Décimale	5	16/29 17/29 18/29 19/29 20/29	*b* *a* *c*	*a* *b* *c*	NON	Triangles et losanges Rectangles : axes admis	1) Découpages en 5 chap. fractionnant bien le travail 2) Approche expérimentale, bonne liaison avec l'école 3) Exercices d'initiation au raisonnement
Delagrave	2	9/13 10/13	*b* *c* *a*	*d* *a* *e*	NON	Triangles isocèles et équilatéraux : définitions à partir des axes de symétrie	
Maths et clic	2	7/15 9/15	*b* *a*	*a* *e* *b* *c* *d*	OUI (sym. d'1 pt et méd.)	Rectangles, losanges, carrés : axes admis, lien établi entre prop. du quad. et prop. de la sym.	1) Justification visible des constructions dans le savoir faire 2) figures à main levée (livre prof) 3) activités sollicitant explicitement les prop. de conservation (livre prof)
Proposition	4	2/12 8/12 11/12 12/12	*a* *b* *c*	*b* *a* *e* *d*	OUI (méd., sym. d'1 pt, bis-sect.)	Axes justifiés et exploités ensuite 1) Losange 2) Triangles isocèle et équilatéral (avec travail sur fig. particulières) 3) Rectangle 4) carré (travail sur fig. particulières)	1) Figures à main-levée 2) Contre ex de conservation 3) Papier pointé, réseaux 4) Contrôle et obstacles 5) Points invariants (pour construire) 6) raisonner pour construire 7) 3 constructions-clefs en appui sur une configuration-clef : le cerf-volant

2.5. Le point de vue mathématique

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler quelques points du savoir mathématique qui, pour éloignés qu'ils puissent sembler du travail de la classe de 6e, n'en sont pas moins des points d'appui susceptibles d'aider le professeur dans la conduite de son enseignement.

Dans le plan affine euclidien :

- Une ***transformation*** du plan est une bijection du plan dans lui même. Ces transformations constituent un groupe pour la composition des applications.
- Une ***isométrie*** du plan est une application du plan dans lui même qui conserve les distances.
- Toute isométrie est bijective, donc est une transformation. Les isométries constituent un sous-groupe du groupe des transformations.
- Toute isométrie est aussi une application affine, ce qui peut se caractériser par le fait que les isométries conservent les barycentres donc aussi l'alignement. Il en résulte que l'image d'une droite (AB) est la droite (A'B') et que l'image d'un segment [AB] est le segment [A'B'].
- Une application affine étant entièrement déterminée par l'image d'un repère affine, c'est à dire de trois points non alignés, il en va de même pour les isométries.
- ***Théorème*** : Toute isométrie du plan peut être décomposée en produit d'au plus trois symétries axiales (réflexions).

Si, de plus, ce plan est orienté on distingue :

- Les isométries directes ou ***déplacements*** qui transforment un repère en un repère de même orientation.

  Ces déplacements constituent un sous-groupe du groupe des isométries. Ce sous-groupe est constitué des translations et des rotations (comprenant entre autre les symétries centrales). Tout déplacement peut être décomposé (d'une infinité de manières) en produit de deux réflexions.
- Les autres isométries qui transforment un repère en un repère d'orientation contraire sont appelées isométries indirectes ou ***antidéplacements***.

  Ce sous-ensemble du groupe des isométries est formé des produits commutatifs $s \circ t = t \circ s$ où s est une réflexion et t une translation dont le vecteur a même direction que l'axe de la réflexion. (réflexion si t est l'identité, « symétrie glissée » si t est

distincte de l'identité). Tout antidéplacement peut être décomposé (d'une infinité de manières) en produit de trois réflexions.

Ces rappels mathématiques fournissent des pistes exploitables pour l'enseignement au collège :

- En 6e d'abord, le fait que les symétries axiales soient des antidéplacements fournit un contre exemple de conservation. En effet les symétries axiales ne conservent pas l'orientation : le symétrique d'un papillon droitier est un papillon gaucher …
- Ce ne sera pas le cas pour les symétries centrales, translations, rotations que les élèves rencontreront dans les années suivantes : ces trois isométries sont des déplacements et donc conservent l'orientation : l'image d'un droitier reste un droitier … Ainsi dans les trois autres niveaux de classes cette spécificité de la symétrie axiale par rapport aux trois autres isométries étudiées peut être mise en évidence. Elle peut aussi être illustrée par le fait que lorsqu'on utilise le calque, la symétrie axiale est la seule des quatre isométries étudiées pour laquelle il est nécessaire de retourner le calque ; pour les trois autres il suffit de le glisser.
- Enfin chacune des trois autres isométries peut être obtenue comme composée de deux symétries axiales. Ceci peut constituer une source d'activités éventuellement introductrices de chacune de ces trois isométries.

Concluons en rappelant que les symétries sont des involutions, c'est à dire qu'elles vérifient $s \circ s$ = identité ou encore $s^{-1} = s$. Ce n'est évidemment pas le cas des translations et des rotations en général. Au collège ceci se traduit par : si P a pour symétrique P' alors P' a pour symétrique P, ce qui légitime l'usage d'expressions du type « P et P' sont symétriques par rapport à … ».

2.6. Le point de vue « vertical » dans les programmes de l'école au lycée

Concernant un grand thème ce point de vue vertical, c'est à dire global sur plusieurs années consécutives, est intéressant. En effet, il met en évidence le cheminement de l'élève sur ces différentes années. Pour le professeur, adopter ce point de vue lui permet donc de travailler à la mise en cohérence de ce cheminement.

A l'école les élèves ont acquis essentiellement des savoir faire expérimentaux notamment sur le pliage et le maniement du calque. Ces pratiques expérimentales leur ont permis de se constituer des images « mentales » réinvesties en particulier sur les supports quadrillés.

En sixième ces pratiques et images mentales vont servir de point d'appui pour accomplir un grand pas : la symétrie axiale se mathématise avec l'apparition notamment de la médiatrice. Cette mathématisation se concrétise dans l'étude de figures.

En 5e l'apparition de la symétrie centrale, qu'il faudra dissocier conceptuellement de la symétrie axiale, apporte un nouvel éclairage. Pour l'une on retourne le calque, pour l'autre non ; l'une conserve l'orientation, l'autre non ; enfin l'une transforme une droite en une droite parallèle, l'autre non. Mais toutes deux prennent appui sur des pratiques expérimentales permettant de disposer d'images mentales et toutes deux sont des outils utilisés mathématiquement.

En 4e et 3e deux autres isométries apparaissent. La particularité de la symétrie axiale se confirme : les trois autres transformations sont des déplacements, elles conservent l'orientation. En 3e où on définit les notions de direction et de sens à propos des vecteurs, on peut remarquer que la symétrie axiale et la rotation ne conservent pas les directions mais que la symétrie centrale et la translation les conservent ; que de plus la translation conserve le sens ce qui n'est pas le cas de la symétrie centrale.

En 2de où apparaissent les angles orientés, la notion d'orientation acquiert un statut officiel et les élèves doivent savoir que la symétrie axiale ne conserve pas les angles orientés alors que les trois autres isométries rencontrées au collège les conservent. Apparaît aussi la définition de triangles isométriques, définis comme triangles ayant leurs côtés deux à deux de même longueur. Les élèves verront également que deux triangles sont isométriques si et seulement si ils sont images l'un de l'autre par une isométrie. La dichotomie entre déplacements et antidéplacements réapparaît : deux triangles isométriques le sont directement ou indirectement.

3. La progression proposée

3.1. Présentation

Résumons les objectifs généraux assignés à cette progression :

- Assurer la transition entre le travail effectué à l'école et celui attendu au collège, notamment permettre de réactiver les connaissances nécessaires sans refaire à l'identique, sans se contenter non plus de lister ces connaissances, mais en essayant au contraire de les éclairer différemment pour les enrichir.
- Assurer sur l'ensemble de l'année un passage du perçu instrumenté au déduit qui est réclamé par le programme et qui justifie le recours à une progression spiralée.
- Assurer l'acquisition des exigibles des programmes en les insérant dans un travail plus large qui permet de leur donner du sens, notamment en justifiant les techniques de construction.

La progression proposée figure dans l'annexe 1 du document papier. Elle permet, même visuellement, de vérifier que le travail sur le grand thème qu'est le raisonnement géométrique occupe bien, au travers de la symétrie axiale, une place omniprésente au cours de l'année.

Elle se compose de trois chapitres : symétrie axiale, axe de symétrie d'une figure, étude de figures à l'aide la symétrie axiale. Mais on peut y ajouter le travail initial mené en début d'année sur la médiatrice d'un segment ainsi que l'entretien du thème entre les trois chapitres notamment au moyen des devoirs en temps libre.

Un autre élément marquant de cette progression est le rôle important que joue une figure habituellement peu utilisée : il s'agit du cerf-volant. Elle permet ici d'unifier le travail effectué sur les trois principales constructions utilisant le compas, ces trois constructions étant celles de la médiatrice, du symétrique d'un point et de la bissectrice. Le cerf-volant a vocation a constituer une image mentale favorisant l'appropriation de ces constructions par les élèves mais il a également vocation à fournir dans chaque cas une justification de la technique employée. Cette figure trouve donc ici une place conforme à son apparition dans le programme.

3.2. Explicitation de certains choix

Au cours des journées d'animation, une difficulté importante rencontrée par les élèves a été fréquemment évoquée. Il s'agit du refus, ou au moins de la non reconnaissance, de la

nécessité qu'il y a pour les élèves à justifier qu'une droite est un axe de symétrie dans les situations où cet axe sert dans une démonstration. Sur ce point, il a également été remarqué que cet obstacle persiste longtemps : on le retrouve en 4e, en 3e, mais aussi au lycée. Afin de ne pas favoriser l'installation de cet obstacle, le choix est fait ici de ne pas introduire trop tôt la notion d'axe de symétrie d'une figure. Dans la progression proposée, cette notion ne sera introduite qu'après avoir assuré le passage au déductif. Ainsi les élèves n'auront à aucun moment de l'année à admettre qu'une droite est un axe de symétrie pour une figure. Ceci élimine la difficile transition à opérer entre un début d'année où l'existence d'un axe serait mathématiquement admise et une période ultérieure inévitable, notamment à propos de l'étude des figures du programme, où cette existence devrait être justifiée.

Ce premier choix a aussi comme conséquence que la médiatrice ne pourra être introduite comme axe de symétrie d'un segment car alors cette apparition serait trop tardive pour être utile dans l'étude de la symétrie. Finalement plusieurs arguments militent pour que la médiatrice apparaisse avant la symétrie et dès le premier chapitre de géométrie de l'année. En premier lieu notons que toute la force de l'outil mathématique qu'est la médiatrice tient dans sa caractérisation comme lieu des points équidistants des deux extrémités d'un segment. La question de savoir si cette caractérisation relève bien de la classe de 6è a souvent été posée lorsque les programmes précédents étaient encore en vigueur. Le programme actuel a le mérite d'apporter une réponse sans ambiguité : non il n'est pas légitime de limiter en 6e le travail sur la médiatrice à sa seule définition comme droite perpendiculaire passant par le milieu d'un segment. Dans ce cas, cette définition apparaîtrait peu motivée : pourquoi s'intéresser à cette droite si on ne lui reconnaît aucune propriété ? Et comment conduire l'étude des figures du programme sans la caractérisation de la médiatrice ? On manquerait dans ce cas d'outils mathématiques.

Il est donc clairement demandé que les élèves comprennent, retiennent et utilisent la caractérisation de la médiatrice d'un segment dès cette classe de 6e. Il s'agit là d'un enjeu majeur. Or chaque professeur sait que les élèves ont souvent quelques difficultés à s'approprier durablement cette connaissance dont l'importance est en revanche évidente. Chacun sait aussi que la première rencontre avec une connaissance, est pour l'élève un moment marquant et souvent décisif pour son appropriation. Par conséquent le choix est fait ici d'une première rencontre avec la médiatrice en tant que lieu des points équidistants de deux points distincts donnés. La place très précoce dans l'année de cette première rencontre renforce encore son caractère marquant et permet de mettre en jeu la médiatrice durant tout le reste de l'année. Ce

choix permet aussi d'installer une problématique générale sur le chapitre 2 qui permettra de revoir les objets classiques de la géométrie que sont la droite, le segment, le cercle comme lieux de points, offrant ainsi une occasion de réviser « autrement ». Cette perspective amène aussi assez naturellement à définir ou reconnaître un point comme intersection de deux lignes (droites ou cercles). C'est un aspect intéressant qu'on fréquentera régulièrement car il est souvent utile dans les raisonnements utilisant les transformations géométriques. C'est notamment le cas, et c'est bien là que se situe la difficulté principale dans les deux exemples suivants, lorsqu'on veut prouver en 6e que le rectangle a deux axes de symétrie et lorsqu'on veut caractériser le parallélogramme par son centre de symétrie en 5e.

Enfin terminons en remarquant que la transition entre l'école et le collège, pour ce qui concerne la géométrie, sera répartie sur deux moments différents : le chapitre 2 dont l'objet principal est la médiatrice permettra de réactiver les bases habituelles concernant droites, segments, cercles, points … Ensuite le chapitre 8 réactivera plus spécifiquement les connaissances concernant la symétrie.

3.3. Le chapitre 2 : « Des points et des figures »

L'objectif de ce chapitre qui est le premier de l'année en géométrie ne se définit pas seulement en terme de contenus. Il doit marquer le passage au collège et, de ce point de vue, la présence de cet objet nouveau qu'est la médiatrice est indispensable. Il doit participer à l'installation du contrat qui sera celui de l'année. Pour cela, il doit déjà attirer l'attention des élèves sur l'importance du raisonnement qui constituera une modification essentielle par rapport au travail conduit à l'école. L'organisation de la classe, avec notamment des travaux de groupes, est un autre aspect de ce contrat à installer.

L'entrée dans le chapitre se fait par une activité consistant à rechercher les points alignés avec deux points distincts donnés, puis les points situés à une distance fixée d'un point donné, enfin les points équidistants de deux points distincts donnés. L'ensemble du travail reste dans le domaine de la géométrie perceptive. Il n'est bien sûr pas question de donner une définition de la droite mais on ne cherchera pas non plus à donner une définition mathématique de l'angle droit ou du parallélisme. Concernant la médiatrice sa construction au compas ne sera pas optimisée trop précocement si on veut que tous les élèves s'approprient l'idée qu'elle est formée des points équidistants : lorsque cette optimisation à l'aide de deux points seulement surviendra, ce sera sous l'impulsion des élèves. Ce sera alors la première rencontre avec le cerf-volant dont une définition sera donnée : quadrilatère ayant deux paires de côtés

consécutifs de même longueur. Le caractère convexe ne figure pas dans cette définition dans un souci de simplification mais aussi parce que le quadrilatère non convexe convient également pour tout le travail auquel on le destine. Il est même souhaitable que les élèves sachent et pratiquent à l'occasion que les deux points choisis pour construire la médiatrice ne sont pas nécessairement de part et d'autre du segment considéré. L'institutionnalisation finale aura lieu en fin de chapitre quand on aura fait quelques pas dans le domaine de la géométrie déduite ce qui permettra de légitimer l'écriture d'énoncés. Pour cette institutionnalisation on reviendra à l'ordre classique, qui n'est pas l'ordre d'apparition en activité, de la définition comme droite perpendiculaire passant par le milieu et des deux propriété d'équidistance. Le retour à cet ordre classique paraît incontournable pour rester en accord avec les manuels et les pratiques du collège. Il n'est pas envisageable en effet de poser une définition-théorème basée sur l'équidistance.

La suite du chapitre est orientée davantage vers une approche du raisonnement à partir des parallèles, perpendiculaires et bien sûr de la médiatrice dont la mise en jeu sera entretenue jusqu'au chapitre 8. Cette approche vise prioritairement à montrer aux élèves la nécessité qu'il y a à élaborer, retenir et donc aussi apprendre des énoncés de cours. C'est un aspect de l'installation du contrat évoqué plus haut. L'activité présentée au 4.1. vise à atteindre cet objectif et ce n'est qu'après ce moment que l'institutionnalisation définitive concernant la médiatrice sera conduite.

3.4. Le chapitre 8 : « Symétrie axiale »

Entre le chapitre 2 et le chapitre 8, la médiatrice aura été suffisamment travaillée pour devenir un outil disponible pour l'étude de la symétrie. Par ailleurs un chapitre consacré aux angles a été rencontré. Il sera réinvesti ici et complété avec l'apparition de la bissectrice comme axe de symétrie d'un angle. Un autre chapitre basé sur l'usage d'un puzzle géométrique a permis de travailler conjointement la proportionnalité, les quotients, les décimaux, la multiplication, les aires, les périmètres ainsi que les agrandissements et réductions dont on a déjà dit que les élèves les avaient rencontrés à l'école. Cette notion sera reprise ici pour donner du sens aux conservations par symétrie axiale. Ces agrandissements et réductions ne sont bien sûr pas des transformations au sens mathématique mais ce sont des transformations de figures au sens expérimental de l'école. Leur place est donc limitée ici à un moment d'activité situé dans le domaine de la géométrie perceptive et instrumentée. Ce moment consiste à comparer ce qui est conservé ou non par les transformations

expérimentales que sont la symétrie axiale à ce moment, elle sera mathématisée ensuite, et les agrandissements et réductions qui seront eux abandonnés lorsqu'on passera dans le domaine de la géométrie déduite. Notamment l'institutionnalisation finale ne portera que sur les conservations par symétrie axiale.

L'entrée dans le chapitre se fait par des pratiques de pliage réactivant les savoir-faire de l'école concernant les figures symétriques. L'usage du calque apparaîtra dans un second temps comme une deuxième procédure expérimentale pertinente en particulier quand l'axe coupe la figure car dans ce cas le pliage est d'un usage moins commode. A ce moment les images mentales révélatrices des conceptions de la symétrie axiale ont été réactivées et un bon moyen de les révéler consiste à pratiquer des figures à main levée. Les activités de contrôle qu'on trouve dans les manuels sont aussi favorables à la rectification des conceptions erronées (exercices du type : « chercher les erreurs »). Elles permettent en effet de mettre en évidence les erreurs classiques révélatrices de ces conceptions erronées. Tout ce travail reste dans le domaine de la géométrie perçue et la notion de figures symétriques, c'est-à-dire superposables par pliage, n'est pas une définition mathématique.

La rencontre de figures coupées par l'axe de symétrie amène à s'intéresser à des points particuliers : les points invariants. En proposant ensuite de travailler sur des figures polygonales, alors qu'on aura jusqu'ici travaillé de préférence sur des figures non polygonales (dessins figuratifs), on s'intéressera à d'autres points particuliers qui sont les sommets du polygone étudié. A ce moment, le lien avec la médiatrice doit être reconnu par les élèves, si il ne l'a pas été auparavant. La définition, mathématique cette fois, de deux points symétriques sera institutionnalisée en distinguant deux cas : points situés ou non sur l'axe. Le mot invariant sera lui aussi donné aux élèves. On peut dès lors institutionnaliser la construction du symétrique d'un point avec règle et équerre ou avec le compas, ce qui amène à réinvestir le cerf-volant.

Il reste à observer que la symétrie axiale conserve l'alignement puis que le symétrique d'un segment s'obtient en symétrisant simplement ses extrémités. Ceci permet de passer à la construction exacte de symétriques de figures polygonales. Ces constructions exactes s'appuieront systématiquement, dans un premier temps au moins, sur un tracé préalable fin, à main levée. Ce préalable oblige l'élève à mobiliser ses connaissances, sa conception de la symétrie axiale et évite ainsi qu'il ne rentre dans une démarche purement algorithmique, stérile et sans intérêt pour sa formation mathématique. On peut aussi dès ce moment engager un travail sur des exercices de construction amenant à raisonner en recourant notamment à l'usage de points invariants. La suite sera traitée sous forme d'une activité d'observation des

conservations et non conservations. On lui donnera de la consistance en comparant les effets des agrandissements réductions et de la symétrie axiale. La non conservation de l'orientation par symétrie axiale est aussi un élément permettant de faire évoluer le regard de l'élève qui, a priori, a tendance à considérer que la symétrie axiale conserve tout.

La dernière partie du chapitre vise à présenter la notion d'axe de symétrie d'une figure avec la contrainte posée précédemment : on justifiera systématiquement l'existence des axes de symétrie dont on fait un usage mathématique. Ceci n'interdira pas de s'assurer de la validité de certaines images mentales en proposant quelques exercices dans lesquels il s'agit de repérer perceptivement des axes de symétrie, par exemple sur les lettres de l'alphabet. Mais on dissociera nettement ce type d'activité du travail plus mathématique et on réservera aux figures classiques de la géométrie un travail déductif.

La première rencontre avec un axe de symétrie se fera à propos du cerf-volant. Afin de donner conscience aux élèves de la symétrie axiale sous-jacente, dont on ne voit pas l'action sur la figure dans ce cas, on utilisera une approche dynamique. Un logiciel de géométrie sera évidemment ici le meilleur support. L'idée consiste, un cerf-volant étant donné, à regarder comment son symétrique évolue en fonction de la position de l'axe. L'axe de symétrie du cerf-volant apparaîtra comme un cas limite. Le mot invariant sera réutilisé ici mais il faudra veiller à dissocier la notion de figure invariante de celle de points invariants. A priori cette distinction paraît subtile pour de jeunes élèves mais la pratique montre qu'elle n'est ni inaccessible ni même déroutante. En revanche passer cette difficulté sous silence risquerait de laisser s'installer des idées fausses. On donnera aussi une définition de la notion d'axe de symétrie d'une figure : « On appelle axe de symétrie d'une figure toute droite *d* pour laquelle la figure est invariante par la symétrie d'axe *d.* » On pourra regarder ensuite d'une autre manière ce qui se passe pour le symétrique d'une droite perpendiculaire à l'axe de la symétrie. On aura ainsi un premier exemple de figure, la droite, possédant une infinité d'axes de symétrie. Un deuxième exemple sera celui du cercle puis on passera au cas d'un angle. La bissectrice sera rencontrée comme axe de symétrie de l'angle mais là encore l'institutionnalisation finale ne sera pas conforme à l'ordre de présentation. La définition sera « demi-droite issue du sommet partageant l'angle en deux angles égaux » et la caractérisation comme axe de symétrie sera ensuite une propriété. Rigoureusement on devrait d'ailleurs énoncer : « La droite support de la bissectrice d'un angle est un axe de symétrie pour cet angle ». Cependant il n'est pas certain qu'alourdir ainsi la formulation participe efficacement à la formation des élèves. Du moins il paraît difficile de l'exiger à ce stade, ce qui n'empêche pas bien sûr de signaler l'abus de langage consistant à identifier la bissectrice et son support.

Enfin la technique de construction au compas de la bissectrice sera justifiée à l'aide de l'axe de symétrie du cerf-volant. C'est un apport conséquent du cerf-volant qui vient combler un vide laissé par les manuels de 6e car aucun d'entre eux ne justifie cette construction.

3.5. Le chapitre 12 : « Etude de figures »

Jusqu'ici la symétrie axiale a été l'objet de l'étude. Dans ce chapitre elle devient un outil mathématique pour produire de nouvelles propriétés. C'est une forme d'aboutissement du travail conduit pendant l'année. C'est aussi pour de jeunes élèves une évolution très ambitieuse du point de vue scientifique. Ce chapitre se situe donc entièrement dans la géométrie déduite. La partie principale est celle du cours dans lequel quatre figures seront étudiées. Cette étude produit des propriétés dont il sera intéressant de montrer ensuite aux élèves qu'à leur tour elles permettront de résoudre des exercices et problèmes. Ces réinvestissements resteront bien sûr très modestes mais ils donneront néanmoins une image déjà fidèle de ce que sont les mathématiques et de leur fonctionnement, dans lequel le raisonnement déductif est le moteur essentiel, tant sur les exercices que dans l'avancement du cours.

Les quatre figures étudiées sont dans l'ordre : le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange et le rectangle. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, on sera attentif dans chaque cas à justifier l'existence des axes de symétrie sur lesquels reposera la suite de l'étude. On sera peut-être amené à faire exception pour le rectangle si on estime que la classe n'est pas prête à recevoir cette démonstration moins facile que celles concernant les trois premières figures. Pour celles-ci on peut par un questionnement adapté guider les élèves puis les faire réfléchir sur la formulation des propriétés obtenues. Sur le triangle équilatéral, on a aussi l'occasion de revenir sur la notion de figure particulière. En effet, le triangle isocèle ayant été étudié, le triangle équilatéral apparaîtra comme un triangle isocèle particulier, doublement ou triplement isocèle. L'étude du triangle équilatéral se limitera ainsi à exploiter celle déjà conduite sur le triangle isocèle.

Voyons plus précisément ce qui ne figure pas dans les manuels de 6e : comment prouver que le rectangle a deux axes de symétrie. Contrairement aux démonstrations évoquées précédemment pour lesquelles on peut faire le choix de les confier aux élèves, celle-ci relève nécessairement de la responsabilité du professeur . En effet elle utilise un raisonnement spécifique consistant à définir un point comme intersection de deux lignes et on ne peut attendre des élèves qu'ils produisent ce type de raisonnement, ce qui en revanche ne signifie

pas qu'ils ne sont pas capables de le recevoir avec profit. Il s'agit d'une forme de raisonnement usuelle concernant les transformations. On la retrouvera par exemple en 5e pour caractériser le parallélogramme par son centre de symétrie. La présenter aux élèves paraît donc important pour leur formation. Les données du problème sont constituées d'un rectangle *ABCD* et d'une droite *d* médiatrice du côté [*AB*]. On veut démontrer que d est un axe de symétrie du rectangle. Le raisonnement consiste à prouver d'abord que d est parallèle à (*BC*) ce qui ne pose pas de problème, puis que d est perpendiculaire à (*CD*). Pour cela on nomme *I* et *J* les intersections respectives de *d* avec [*AB*] et [*CD*]. On prouve que I*BC*J est un rectangle puisqu'il a trois angles droits. Il reste à prouver que *C* a pour symétrique *D* par la symétrie d'axe *d*. Pour faciliter la présentation de ce raisonnement on peut recourir à des schémas fléchés :

1er temps :	$A \to B$	Comme $(BC) // d$ on a aussi $d' // d$
	$B \to A$	Comme $B \in (BC)$ on a $A \in d'$
	$C \to C'$	donc $d' = (AD)$
	$(BC) \to d'$	donc $C' \in (AD)$
2e temps :	$C \to C'$	$C \in (CD)$ donc $C' \in (CD)$
	$(CD) \to (CD)$	$C' \in (CD)$ et $C' \in (AD)$ donc $C' = D$
3e temps :	$A \to B$	*ABCD* a pour symétrique lui-même
	$B \to A$	*ABCD* est invariant par la
	$C \to D$	symétrie d'axe *d*
	$D \to C$	donc la droite *d* est un axe de symétrie
	$ABCD \to BADC = ABCD$	du rectangle

On peut institutionnaliser que le rectangle a deux axes de symétrie qui sont ses médianes.

4. Des situations de classe

4.1. Une activité de première rencontre avec la notion de démonstration

Les deux grands objectifs assignés à cette activité sont :

- Mettre en évidence la nécessité de la preuve

- Mettre en évidence la nécessité de disposer d'énoncés connus et acceptés par tous pour construire cette preuve

Elle prend place dans le chapitre 2 entre les activités du début du chapitre et la phase où on commencera à rencontrer des exercices à vocation déductive sur perpendiculaires, parallèles et médiatrice.

Voici cette activité, qui est tirée de la thèse de Gérard AUDIBERT, où sont aussi utilisés les travaux de Nicolas BALACHEFF sur la démonstration :

La question posée aux élèves :

« Quel nombre maximum de points d'intersection peut-on obtenir entre un rectangle et deux cercles ? »

Phase 1 : appropriation du problème

Il faut préciser la question : on compte les points d'intersection entre le rectangle et chaque cercle ainsi que les points d'intersection entre les 2 cercles. Le cas où les 2 cercles seraient confondus est exclu.

Chaque élève construit une figure individuellement.

L'élève ayant obtenu le plus grand nombre de points d'intersection présente sa solution. Ce record provisoire est inscrit au tableau.

Phase 2 : travaux de groupes

Placés par groupes de 3 ou 4, les élèves doivent chercher à améliorer le record précédent. A chaque fois qu'un groupe obtient une amélioration du record, il présente sa solution à la classe.

Une question surgit inévitablement : « Quand va-t-on s'arrêter ? »

Le professeur donne alors la dernière consigne :

« Le groupe déclaré vainqueur sera celui qui aura tracé une figure sur laquelle il est capable d'apporter la preuve que son record ne peut plus être battu par personne. »

Par la suite, selon les réactions des élèves, il devra juger de l'intérêt ou de la nécessité qu'il y a à apporter des aides.

Phase 3 : conclusion

Les élèves reprennent un travail individuel et rédigent la preuve sous la conduite du professeur. Il est important de mettre en évidence à ce moment que c'est un raisonnement qui a permis d'apporter la réponse finale à la question posée.

Phase 4 : institutionnalisation

« En mathématiques on a souvent besoin de fournir des preuves ou démonstrations. Pour prouver ou démontrer on utilisera les données du problème et les règles connues c'est à dire les définitions, propriétés, théorèmes, règles de calculs vues en cours. »

Remarques sur le fonctionnement de l'activité :

1) Il est nécessaire d'avoir auparavant observé qu'un cercle et une droite peuvent avoir 2 , 1 ou aucun points d'intersection ; qu'il en va de même pour 2 cercles.

2) Le nombre théorique maximum de points d'intersection qu'on peut obtenir est donc de :

$$4 \times 2 + 4 \times 2 + 2 = 18$$

Une figure bien construite constituera évidemment une preuve suffisante ici pour assurer que ce maximum est atteint.

3) La réalisation de cette figure est fortement problématique pour les élèves en début de 6e. En effet sa réalisation pratique impose que le rectangle choisi ait une forme qui se rapproche du carré. Or ce n'est pas la forme prototypique du rectangle que les élèves ont en tête. Comme le tracé du rectangle est le premier tracé qu'ils effectuent pour construire la figure, des ajustements successifs seront nécessaires pour améliorer le résultat obtenu. Ceci donne tout son sens à la phase 2 de l'activité.

4) Une question supplémentaire émergera en phase 2 ou 3 : a-t-on le droit d'utiliser un carré ? C'est une opportunité à saisir pour revoir ou aborder la question des figures particulières.

5) Le moteur de l'activité est, en début de phase 2, une compétition entre les groupes. Elle évolue ensuite davantage vers un défi lorsqu'il s'agit de fournir une preuve.

6) La preuve attendue a une grande légitimité dans l'activité : c'est une preuve pour convaincre. Tous les élèves en ressentent la nécessité et en acceptent le verdict lorsqu'elle est fournie.

7) C'est aussi une activité emblématique de ce qui peut-être fait pour faire évoluer les élèves du dessin vers le raisonnement. Ceci constitue l'objectif principal de l'activité. D'autres objectifs sont les axiomes d'incidences entre droites et cercles, une réflexion sur la nature du rectangle et le fait que le carré est un rectangle particulier.

4.2. Des exercices et devoirs pour réinvestir la médiatrice

Pour entretenir et conforter les connaissances sur la médiatrice entre les chapitres 2 et 8, on peut trouver de nombreux exercices classiques. On trouvera dans l'annexe 4 du

document papier un texte de devoir à la maison qui plait beaucoup aux élèves et qui présente l'avantage de remettre l'accent sur le point conçu comme intersections de deux lignes.

4.3. Des figures à main levée

L'annexe 7 du document papier présente des propositions, qui seront entretenues durablement, d'utilisation des figures à main levée. Ces pratiques nécessitent une certaine installation dans la classe car, hormis le fait qu'elles ne sont pas toujours simples, elles peuvent dérouter certains élèves trop attachés à une belle figure. Mais c'est bien aussi un type d'activité qui peut justement participer à décaler les préoccupations de l'élève du dessin concret vers la figure mathématique.

4.4. **Des situations et des exercices pour raisonner**

Les annexes du document papier proposent plusieurs exercices et des devoir à vocation déductive. L'annexe 8 présente des situations permettant de réfléchir sur la notion de conservation. La construction du sens repose d'abord sur la présentation de contre-exemples.

4.5. Des résumés de cours concernant les principales constructions

L'annexe 12 du document papier récapitule les quatre constructions essentielles mettant en jeu le cerf- volant.