(Par Annette Leroy)

Le vécu des élèves avant d'aborder les similitudes en Terminale S spécialité

- En classe de Seconde, les élèves ont étudié les triangles semblables définis par l'égalité des angles ou par l'existence d'un coefficient d'agrandissement réduction.
- Ils ont vu des exemples de transformations :
  translations, rotations et symétries depuis le collège ; homothéties en classe de Première S.
- Dans le tronc commun de la classe de Terminale S :
  translations, homothéties et rotations sont mises en œuvre en liaison avec leurs formes complexes.

Dans ces études, les transformations agissent d'abord sur une configuration (collège, seconde), puis sur le plan tout entier.

Les composées des transformations étudiées ne sont pas envisagées systématiquement, ni a fortiori le groupe qu'elles constituent.

L'objectif de la spécialité

Il s'agit d'étudier les similitudes du plan, définies par une condition de conservation :

on appelle similitude du plan toute transformation qui conserve les rapports de distances.

C'est donc le choix d'une définition en « compréhension » :

on donne la condition que doivent vérifier les similitudes et non la liste des similitudes.

Les similitudes dans l'ancien programme de spécialité.

Dans le programme précédent, l'accent était mis sur les composées de transformations.

- les similitudes directes fixant un point O introduites comme composées d'une homothétie de centre O et d'une rotation de centre O ;
- décomposition d'une rotation et d'une translation en produit de symétries axiales ;
- composées de translations et de rotations ;
- composées de translations et de symétries axiales ;
- composées d'homothéties et de translations.

Les élèves disposaient en particulier d'un inventaire des déplacements du plan :

En démontrant que toute similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement, on pouvait déduire l'étude des similitudes directes de celle des déplacements.

Les similitudes dans le nouveau programme de spécialité.

Dans les nouveaux programmes, l'étude des similitudes ne repose plus sur celle des isométries et l'étude des similitudes directes ne repose plus sur celle des déplacements. Les isométries sont vraiment considérées comme des cas particuliers de similitudes et l'étude des déplacements se fait en application de celle des similitudes directes.

Dans un souci d'efficacité, le programme privilégie les nombres complexes pour établir les résultats sur les similitudes directes :

les éviter nécessiterait de plus longs développements (étude préalable des déplacements, puis composition de déplacements et d'homothéties).

Cependant, la résolution d'exercices et de problèmes ne se limitera pas à du calcul dans le plan complexe :

le professeur veillera à équilibrer les deux aspects en proposant aussi bien des exercices utilisant les nombres complexes que des exercices où les similitudes apparaîtront de façon purement géométrique.

Les problèmes de composition se poseront naturellement dans les exercices sans nécessiter un arsenal théorique important.

Lien avec la classe de seconde.

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si il existe une similitude plane T qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

Ainsi, dans les exemples d'études de configurations ou de lieux géométriques où l'on décèle des triangles semblables, se cachent des similitudes, voire des isométries.

Le contenu et une progression possible

Sommaire.

Le contexte est celui du plan orienté.
La donnée d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$ *permet d'utiliser le plan complexe* ℂ.

I. La notion de transformation.

- Une transformation du plan est une bijection T du plan dans lui-même : cela signifie
  d'une part qu'à tout point M du plan est associé un unique point T(M), image de M par T ;
  d'autre part que, pour tout point N du plan, il existe un unique point M tel que T(M)=N.
- La transformation réciproque T' de la transformation T est définie par la condition :
  $T'(\mathrm{N}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{N} = T(\mathrm{M})$.

Les notions générales de bijection et de bijection réciproque ne sont pas au programme. Cependant, ces termes pourront être utilisés à l'occasion de l'étude des exemples de bijections du programme : exponentielle et logarithme, puissance n et racine n-ième, transformations géométriques. On peut d'ailleurs noter que l'homothétie et la translation ont déjà permis en Première S une approche intuitive de la notion de bijection.

II. Les similitudes planes : définitions et exemples.

- **Définition 1.**

Une similitude (plane) est une transformation T du plan qui conserve les rapports de distances, c'est-à-dire telle que, pour tous points M, N, P et Q avec $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, l'on ait : $\dfrac{T(\mathrm{M})\,T(\mathrm{N})}{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PQ}}$.

Remarque. On pourra noter que, T étant une bijection, $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ implique $T(\mathrm{P}) \neq T(\mathrm{Q})$.

- **Théorème 1.**

Soit T une transformation du plan.
T conserve les rapports de distances si et seulement si T multiplie les distances par un même nombre réel $\lambda > 0$.
Autrement dit :
T est une similitude si et seulement si il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $T(\mathrm{M})T(\mathrm{N}) = \lambda\ \mathrm{MN}$, pour tous points M et N.

Démonstration

1. Supposons que T est une transformation qui conserve les rapports de distances. On déduit de la définition 1 que, pour tous points M, N, P et Q avec $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ et $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$, on a $\dfrac{T(\mathrm{M})\,T(\mathrm{N})}{\mathrm{MN}} = \dfrac{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})}{\mathrm{PQ}}$.
   Autrement dit le rapport $\dfrac{T(\mathrm{M})\,T(\mathrm{N})}{\mathrm{MN}}$ est indépendant des points M et N. Appelons λ cette constante réelle. Elle est strictement positive car $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ implique $T(\mathrm{M}) \neq T(\mathrm{N})$. On en déduit que $T(\mathrm{M})T(\mathrm{N}) = \lambda\ \mathrm{MN}$ pour tous points M et N avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$. Et cette égalité est encore vraie lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{N}$.
2. La réciproque est immédiate.

- **Définition 2.**

Etant donné un nombre réel $\lambda > 0$, on appelle similitude de rapport λ toute transformation T du plan telle que $T(\mathrm{M})T(\mathrm{N}) = \lambda\ \mathrm{MN}$, pour tous points M et N.

- **Exemples de similitudes.**

La transformation *T*	est une similitude de rapport …	et a pour écriture complexe $z \mapsto z'$ avec …
translation de vecteur $\vec{u}$	$\lambda = 1$	$z' = z + b$ (b affixe de $\vec{u}$)
homothétie de centre Ω et de rapport *k* (réel non nul)	$\lambda = \lvert k \rvert$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ (ω affixe de Ω)
rotation de centre Ω et d'angle θ	$\lambda = 1$	$z' - \omega = e^{i\theta}\ (z - \omega)$ (ω affixe de Ω)
symétrie axiale d'axe Δ	$\lambda = 1$	Cas général ? ? ? Cas particulier. Lorsque Δ est l'axe des abscisses : $z' = \bar{z}$

III. Les isométries du plan : définitions et exemples.

- **Définition 3.**

On appelle isométrie du plan toute transformation du plan qui conserve les distances autrement dit toute similitude plane de rapport 1.

Exemples. Les translations, les symétries axiales et les rotations (en particulier les symétries centrales) sont des isométries.

IV. Réciproque d'une similitude plane. Composée de deux similitudes planes.

On déduit directement des définitions les résultats suivants.

- **Théorème 2.**

La composée de deux similitudes de rapports respectifs λ_1 et λ_2 est une similitude de rapport $\lambda_1 \times \lambda_2$.

La transformation réciproque d'une similitude de rapport λ est un similitude de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Ce théorème permet de fabriquer de nouvelles similitudes.

Ainsi, on peut, <u>sur des exemples</u>, rechercher les écritures complexes de la composée d'une rotation et d'une homothétie, de la composée d'une homothétie et de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, etc.

Ces exemples permettront :

d'une part de montrer que la composition des similitudes n'est pas commutative ;

d'autre part, d'observer qu'à chaque fois la similitude considérée a une écriture complexe du type $z \mapsto az + b$ ou du type $z \mapsto a\bar{z} + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

On peut, à ce niveau, établir que toute transformation d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) est une similitude de rapport $\lvert a \rvert$.

Démonstration.

1. Soit *T* une transformation d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$). Soit M et N des points du plan d'affixes respectives *m*, et *n*. Les points images *T*(M) et *T*(N) ont pour affixes respectives $m' = am + b$ et $n' = an + b$. On a donc $m' - n' = a(m - n)$. En passant aux modules, on obtient $T(\mathrm{M})T(\mathrm{N}) = \lvert a \rvert \mathrm{MN}$.

2. Même démonstration avec une transformation T d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z}+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$), avec cette fois $m'-n' = a\left(\overline{m}-\overline{n}\right) = a\ \overline{(m-n)}$ et, sachant que deux nombres complexes conjugués ont le même module, on aboutit encore à $T(\mathrm{M})T(\mathrm{N}) = |a|\mathrm{MN}$.

- Mais, dans le but d'étudier les similitudes en général, c'est au problème réciproque qu'il faut nous intéresser.

V. Effet d'une similitude plane sur un angle.

- **Théorème 3.**

Si T est une similitude alors T conserve les angles géométriques.

Démonstration.

Notons λ le rapport de la similitude T. Etant donnés des points A, B et C (avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$) d'images respectives A', B' et C' par T, les égalités $\mathrm{A'B'} = \lambda \mathrm{AB}$, $\mathrm{A'C'} = \lambda \mathrm{AC}$, $\mathrm{B'C'} = \lambda \mathrm{BC}$ et la relation d'AL-KASHI permettent d'établir l'égalité $\cos \hat{\mathrm{A}} = \cos \hat{\mathrm{A}}'$. On en déduit l'égalité $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$.

VI. Les similitudes planes directes.

1. Définition 4.

On appelle similitude directe toute similitude T qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire telle que, pour tous points M, N, P et Q (avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$), on ait : $\left(\overrightarrow{T(\mathrm{M})T(\mathrm{N})}, \overrightarrow{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)$.

2. Exemples.

- Les translations, les rotations, les homothéties (même celles de rapport négatif !) et, en particulier, les symétries centrales sont des similitudes directes. Plus généralement, toute transformation d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ est une similitude directe.

Démonstration.

Soit T une transformation d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$). Soit M, N, P et Q (avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$) des points du plan d'affixes respectives m, n p et q. Les points images T(M), T(N), T(P) et T(Q) ont pour affixes respectives $m' = am+b$, $n' = an+b$, $p' = ap+b$ et $q' = aq+b$.

Un calcul simple permet d'aboutir à l'égalité $\dfrac{q'-p'}{n'-m'} = \dfrac{q-p}{n-m}$.

L'égalité des arguments de ces deux quotients permet alors de conclure.

- La composée de deux similitudes directes et la transformation réciproque d'une similitude directe sont des similitudes directes.

Démonstration immédiate par propriété de conservation.

3. Forme complexe d'une similitude directe.

- **Théorème 4.**

Les similitudes directes (planes) sont les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

Démonstration.

On a établi au paragraphe précédent que toute transformation d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$) est une similitude directe. Réciproquement, considérons une similitude directe *T* et déterminons son écriture complexe.

Soit P, Q et M (avec $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{M}$) des points du plan d'affixes respectives *p*, *q* et *z*. Notons *p*', *q*' et *z*' les affixes respectives des points images par *T*.

La traduction complexe des égalités $\dfrac{T(\mathrm{P})\,T(\mathrm{M})}{T(\mathrm{P})\,T(\mathrm{Q})} = \dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PQ}}$ et $\left(\overrightarrow{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})}, \overrightarrow{T(\mathrm{P})T(\mathrm{M})}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PM}}\right)$

montre que les quotients $\dfrac{z'-p'}{q'-p'}$ et $\dfrac{z-p}{q-p}$ ont même module et même argument donc qu'ils sont égaux.

En particulier en choisissant pour P et Q les points d'affixes respectives 0 et 1, on obtient , pour tout $z \neq 0$, $\dfrac{z'-p'}{q'-p'} = z$, égalité qui s'écrit $z' = (q'-p')\,z + p'$. Cette égalité étant vérifiée encore pour $z = 0$,

on aboutit bien à une écriture complexe du type $z \mapsto az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$).

4. Angle d'une similitude directe.

- **Théorème 5 et définition.**

> Soit *T* une similitude directe.
> L'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T(\mathrm{M})T(\mathrm{N})}\right)$ ne dépend pas des points distincts M et N et est appelé angle de la similitude directe *T*.

Démonstration.

On utilise l'écriture complexe $z \mapsto az+b$ de *T*. Soit M et N des points du plan d'affixes respectives *m*, et *n*. Les points images *T*(M) et *T*(N) ont pour affixes respectives $m' = am+b$ et $n' = an+b$. On a donc $m'-n' = a(m-n)$. En passant aux arguments , on obtient $\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T(\mathrm{M})T(\mathrm{N})}\right) = \arg(a)$.

Remarque : une mesure θ de cet angle est un argument du nombre complexe *a* de l'écriture complexe $z \mapsto az+b$ de *T*.

Exemples :

Une translation est une similitude directe de rapport 1 et d'angle $\theta = 0$.
Une homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe de rapport *k* et d'angle $\theta = 0$.
Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle $\theta = \pi$.
Une rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ .

- **Angle d'une composée, angle d'une réciproque.**

> 1. Si T_1 et T_2 sont des similitudes directes d'angles respectifs θ_1 et θ_2, alors la composée $T_2 \circ T_1$ est une similitude directe d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
> 2. Si *T* est une similitude directe d'angle θ alors la transformation réciproque de *T* est une similitude directe d'angle $-\theta$.

Démonstration.

1. Une démonstration consiste à utiliser la définition de l'angle d'une similitude directe et de la relation de Chasles relative aux mesures des angles orientés :

   M et N étant deux points distincts du plan, la similitude directe $T_2 \circ T_1$ a pour angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T_2 \circ T_1(\mathrm{M})\ T_2 \circ T_1(\mathrm{N})}\right)$.

   $$\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T_2 \circ T_1(\mathrm{M})\ T_2 \circ T_1(\mathrm{N})}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T_1(\mathrm{M})\ T_1(\mathrm{N})}\right) + \left(\overrightarrow{T_1(\mathrm{M})T_1(\mathrm{N})}, \overrightarrow{T_2 \circ T_1(\mathrm{M})\ T_2 \circ T_1(\mathrm{N})}\right)$$

   c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{T_2 \circ T_1(\mathrm{M})\ T_2 \circ T_1(\mathrm{N})}\right) = \theta_1 + \theta_2$.

   Une autre démonstration peut consister à utiliser les écritures complexes $z \mapsto a_1 z + b_1$ et

$z \mapsto a_2 z + b_2$ respectives des similitudes directes T_1 et T_2, et la propriété relative aux arguments $\arg(a_1 \times a_2) = \arg(a_1) + \arg(a_2)$.

2. Notons T' la transformation réciproque de la similitude directe *T*.
On sait que T' est une similitude directe. Notons θ' son angle.
On a $T' \circ T = id$. Or l'identité étant une similitude directe d'angle nul. La partie 1 du théorème permet alors d'établir que $\theta + \theta' = 0$.

Ce résultat et celui relatif au rapport d'une composée permettent de déterminer la nature de la composée de deux similitudes directes T_1 et T_2.
Par exemple :

Si T_1 est une similitude directe de rapport λ_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et si T_2 est une similitude directe de rapport λ_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors la composée $T_2 \circ T_1$ est une similitude directe de rapport $\lambda_1 \times \lambda_2$ et d'angle π, c'est à dire une homothétie de rapport $k = -\lambda_1 \times \lambda_2$.

Dans les études de configurations de façon purement géométrique, on pourra être amené à rechercher la nature de la composée de deux similitudes directes.

5. Point fixe d'une similitude directe.

- **Théorème 6 et définition.**

Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un et un seul point fixe, appelé centre de la similitude directe *T*.

Démonstration.

On utilise l'écriture complexe $z \mapsto az + b$ de *T* et on résout, dans le cas $a \neq 1$; l'équation $az + b = z$.

Les moyens géométriques de déterminer le point fixe d'une similitude directe sont hors programme.

6. Description géométrique des similitudes directes.

- **Théorème 7 et définition.**

Soit *T* une similitude directe. Notons λ son rapport et θ son angle.

1. Si $\lambda = 1$ et $\theta = 0$, alors *T* est une translation.
2. Sinon, *T* admet un unique point fixe Ω et, si l'on désigne par *r* la rotation de centre Ω d'angle θ et par *h* l'homothétie de centre Ω et de rapport λ, on a : $T = r \circ h = h \circ r$.
On dit alors que *T* est une similitude directe à centre, plus précisément, la similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ.
L'écriture $T = r \circ h = h \circ r$ est appelée la forme réduite de la similitude directe *T*.

Démonstration

On utilise l'écriture complexe $z \mapsto az + b$ de T. On sait que $|a| = \lambda$ et que $\arg(a) = \theta$.

1°) Si $\lambda = 1$ et $\theta = 0$, alors $a = 1$ et *T* est une translation.

2°) Sinon, $a \neq 1$ et d'après le théorème 6, *T* admet un unique point fixe Ω dont l'affixe est notée ω.

L'égalité $a\omega + b = \omega$ permet d'obtenir l'équivalence $(z' = az + b) \Leftrightarrow (z' - \omega = a(z - \omega))$.

L'écriture complexe $z \mapsto z'$ de *T* est donc telle que $z' - \omega = \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$. Il suffit alors de montrer que $r \circ h$ et $h \circ r$ ont également pour écriture complexe $z \mapsto z'$ avec $z' - \omega = \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$.

Exemples :

L'homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$ est la similitude directe de centre Ω, de rapport *k* et d'angle $\theta = 0$.

L'homothétie de centre Ω, de rapport $k<0$ est la similitude directe de centre Ω, de rapport $-k$ et d'angle $\theta=\pi$.
La rotation de centre Ω et d'angle θ est la similitude directe de centre Ω, de rapport 1 et d'angle θ.

On pourra faire remarquer sur un exemple que, lorsque l'homothétie h et la rotation r ne sont pas de même centre, on n'a plus forcément l'égalité $r\circ h=h\circ r$.
On pourra également remarquer qu'étant donné un point Ω d'affixe ω, les similitudes directes de centre Ω sont les transformations du plan d'écriture complexe $z\mapsto z'$ avec $z'-\omega=a\,(z-\omega)$ où a est un nombre complexe non nul.

7. Similitudes directes et couples de points.

- **Théorème 8.**

Soit P, Q, P' et Q' des points du plan tels que $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$ et $\mathrm{P'}\neq\mathrm{Q'}$. Il existe une et une seule similitude directe qui transforme P en P' et Q en Q'.

Démonstration

On recherche des nombres complexes a (non nul) et b tels que la similitude directe T d'écriture complexe $z\mapsto az+b$ soit telle que $T(\mathrm{P})=\mathrm{P'}$ et $T(\mathrm{Q})=\mathrm{Q'}$.
Si l'on désigne par p, q, p' et q' les affixes respectives des points P, Q, P' et Q', on est amené à résoudre le système $\begin{cases}a\,p+b=p'\\ a\,q+b=q'\end{cases}$ d'inconnue $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$. Le fait que l'on ait $p\neq q$ assure l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, et, sachant que l'on a $p'\neq q'$, on démontre que a est non nul.

Remarque.
Il résulte du théorème précédent qu'une similitude directe T est entièrement déterminée par la donnée des images P' et Q' de deux points distincts P et Q.
La similitude directe T a alors pour rapport $\lambda=\dfrac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{PQ}}$ et pour angle $\theta=\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}\right)$.

Mais les moyens géométriques pour déterminer le centre d'une similitude directe à centre définie par deux couples de points ne sont pas au programme.
Certains cas particuliers sont toutefois à connaître :

- Si $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ alors T est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$.
- Si $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ (avec k réel non nul, distinct de 1), alors T est une homothétie de rapport k et on connaît des moyens géométriques pour construire son centre à partir des points P,Q, P' et Q'.
  En particulier, si $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}=-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, alors T est la symétrie centrale dont le centre est le milieu du segment $[\mathrm{PP'}]$.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ sont distincts mais de même norme, alors T est une rotation d'angle $\theta=\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}\right)$ et, en général, on peut construire son centre (intersection des médiatrices des segments [PP'] et [QQ'] dans le cas où ces deux médiatrices ne sont pas confondues).

8. Application à l'étude des déplacements du plan.

Les déplacements du plan sont des similitudes planes directes particulières. Leur étude découle directement de l'étude générale des similitudes planes directes.

- **Définition 5.**

On appelle déplacement du plan toute similitude plane directe de rapport 1 c'est-à-dire toute isométrie du plan qui conserve les angles orientés.

- **Forme géométrique des déplacements.**

Il résulte directement de l'étude des similitudes directes (théorème 7) que les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

- **Ecriture complexe des déplacements.**

Il résulte directement de l'écriture complexe d'une similitude directe que les déplacements sont les transformations d'écriture complexe $z \mapsto az+b$ avec $|a|=1$.

Aucun résultat spécifique à la composition des déplacements n'apparaît dans les programmes. Pour composer deux déplacements, on pourra :

ou bien utiliser les écritures complexes ;

ou bien utiliser le fait que la composée d'une similitude directe de rapport λ_1 et d'angle θ_1, et d'une similitude directe de rapport λ_2 et d'angle θ_2 est une similitude directe de rapport $\lambda_1 \times \lambda_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Dans le cas $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ *où la composée est une rotation, la construction géométrique du centre de cette rotation n'est pas au programme.*

9. Effets des similitudes directes sur certaines configurations.

Les propriétés qui suivent seront fréquemment utilisées dans les exercices d'études de configurations ou de recherche de lieux géométriques exploitant les similitudes directes.

- **Effet d'une similitude directe sur un barycentre.**

Toute similitude directe conserve les barycentres. Autrement dit, étant donnée une similitude directe T, si G est le barycentre d'un système de points pondérés $\{(\mathrm{P}_1, \alpha_1), (\mathrm{P}_2, \alpha_2), \dots (\mathrm{P}_n, \alpha_n)\}$, alors son image T(G) est le barycentre du système image $\{(T(\mathrm{P}_1), \alpha_1), (T(\mathrm{P}_2), \alpha_2), \dots (T(\mathrm{P}_n), \alpha_n)\}$.

Démonstration.

Le théorème d'associativité du barycentre établi en première S permet de montrer que tout barycentre se définit à partir de barycentres de deux points. Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas $n=2$.

Soit T une similitude directe et $z \mapsto az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$) son écriture complexe.

Soit $\{(\mathrm{P}, \alpha), (\mathrm{Q}, \beta)\}$ un système de points pondérés avec $\alpha+\beta \neq 0$. Notons G le barycentre de ce système, p, q et g les affixes respectives des points P, Q et G, et enfin p', q' et g' les affixes respectives des points images T(P), T(Q) et T(G).

On a $p' = ap+b$, $q' = aq+b$ et $g' = ag+b$.

Un calcul simple donne alors $\alpha(p'-g')+\beta(q'-g') = a[\alpha(p-g)+\beta(q-g)]$ (égalité *)

Or, par définition du barycentre G, on a $\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{GP}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{GQ}} = 0$ donc $\alpha(p-g)+\beta(q-g)=0$.

L'égalité * donne $\alpha(p'-g')+\beta(q'-g')=0$, c'est-à-dire $\alpha\,\overrightarrow{T(\mathrm{G})T(\mathrm{P})} + \beta\,\overrightarrow{T(\mathrm{G})T(\mathrm{Q})} = 0$, ce qui prouve que le point T(G) est le barycentre du système image $\{(T(\mathrm{P}), \alpha), (T(\mathrm{Q}), \beta)\}$.

- **Effet d'une similitude directe sur une droite, un segment.**

Les similitudes directes transforment toute droite en une droite, tout segment en un segment.
Plus précisément, étant donnés deux points distincts P et Q :
1. l'image de la droite (PQ) par une similitude directe T est la droite (T(P) T(Q)) ;
2. l'image du segment $[\mathrm{PQ}]$ par une similitude directe T est le segment $[T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})]$.

Démonstration.

Elle s'appuie sur les caractérisations barycentriques d'une droite et d'un segment, au programme du tronc commun de Terminale S.

1) Image de la droite (PQ) par une similitude directe plane T.

a) . Soit M un point de la droite (PQ). Prouvons que le point T(M) appartient à la droite (T(P) T(Q)).

M étant un point de la droite (PQ), il existe des nombres réels α et β de somme non nulle tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{P}, \alpha), (\mathrm{Q}, \beta)\}$.

La similitude directe T conserve le barycentre donc le point T(M) est le barycentre du système image $\{(T(\mathrm{P}), \alpha), (T(\mathrm{Q}), \beta)\}$.On en déduit que le point T(M) appartient à la droite (T(P) T(Q)).
On a prouvé que l'image de la droite (P Q) par T est incluse dans la droite (T(P) T(Q)).
b) Réciproquement, soit N un point de la droite (T(P) T(Q)). Prouvons que le point N est l'image par T d'un point de la droite (PQ).
Notons T' la transformation réciproque de la similitude directe T. On sait que T' est une similitude directe. Donc un raisonnement analogue à celui du a) montre que le point T'(N) appartient à la droite (T'[T(P)], T'[T(Q)]) à savoir la droite (PQ). Posons M=T'(N) . Ce point M appartient à la droite (PQ) et, par définition de la transformation réciproque T', on a N=T(M).
On a établi l'inclusion réciproque.
2) Image du segment $[\mathrm{PQ}]$ par une similitude directe plane T.
Même démonstration par double inclusion que pour la droite avec, cette fois, α et β de même signe.

A propos des réciproques des démonstrations précédentes, citons un extrait de la brochure « Accompagnement des programmes en classe de Première S » qui peut paraître encore valable niveau Terminale S :

> *« On peut observer que certaines réciproques (par exemple, pour montrer que l'image d'une droite est une droite) paraissent inutiles aux yeux de la plupart des élèves : peut-être vaut-il mieux y revenir plus tard lorsque certaines recherches de lieux géométriques auront montré le caractère indispensable de cette réciproque. »*

- **Effet d'une similitude directe sur un cercle.**

Les similitudes directes transforment tout cercle en un cercle. Plus précisément : 1. l'image d'un cercle C de centre I et de rayon R par une similitude directe T de rapport λ est le cercle de centre T(I) et de rayon $\lambda\mathrm{R}$. 2. étant donnés deux points distincts P et Q , l'image du cercle de diamètre $[\mathrm{PQ}]$ par une similitude directe T est le cercle de diamètre $[T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})]$.

Démonstration.

1) Image du cercle C de centre I et de rayon R par une similitude directe plane T de rapport λ .
On procède de nouveau par double inclusion.
a) . Soit M un point du cercle C. Prouvons que le point T(M) appartient au cercle C' de centre T(I) et de rayon $\lambda\mathrm{R}$.
M étant un point du cercle C de centre I et de rayon R, on a $\mathrm{IM} = \mathrm{R}$.
La similitude directe T a pour rapport λ donc $T(\mathrm{I})T(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{R}$. On en déduit que le point T(M) appartient au cercle C' de centre T(I) et de rayon $\lambda\mathrm{R}$.
On a prouvé que l'image du cercle C par T est incluse dans le cercle C' .
b) Réciproquement, soit N un point du cercle C' . Prouvons que le point N est l'image par T d'un point du cercle C.
Notons T' la transformation réciproque de la similitude directe T. On sait que T' est une similitude directe de rapport $\frac{1}{\lambda}$. Donc un raisonnement analogue à celui du a) montre que le point T'(N) appartient au cercle de centre T'[T(I)] et de rayon $\frac{1}{\lambda}\times(\lambda\mathrm{R})$ à savoir, le cercle de centre I et de rayon R, c'est-à-dire le cercle C. Posons M=T'(N) . Ce point M appartient au cercle C et, par définition de la transformation réciproque T', on a N=T(M).
On a établi l'inclusion réciproque.
2) Image du cercle C de diamètre $[\mathrm{PQ}]$ par une similitude directe plane T .
Notons I le milieu du segment $[\mathrm{PQ}]$. C est donc le cercle ayant pour centre le point I et passant par le point P. D'après la propriété énoncée au 1., l'image du cercle C par la similitude directe T est le cercle C' ayant pour centre le point T(I) et passant par le point T(P)

Or la similitude directe T conserve les barycentres donc en particulier les milieux. Le point I étant le milieu du segment $[\mathrm{PQ}]$, son image T(I) est le milieu du segment image $[T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})]$.
Finalement, le cercle image C' est le cercle de diamètre $[T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})]$.

VII Etude générale des similitudes planes

L'étude complète et la classification des similitudes planes « non directes » ne sont pas au programme. Il est juste question de déterminer leur écriture complexe (théorème 10). L'obtention de cette écriture complexe repose sur le théorème 9, explicitement au programme.
D 'autre part, dans le but d'étudier des configurations et de retrouver les triangles semblables introduits en seconde, il semble utile de rechercher l'effet d'une similitude (plane) non directe sur un angle orienté. A priori, une telle similitude pourrait conserver certains angles orientés et transformer les autres en des angles de mesures opposées. Pour parler de similitude « indirecte », on attendra de prouver que toute similitude plane non directe transforme chaque angle orienté en un angle de mesure opposée (théorème 11).

1. Ecriture complexe d'une similitude non directe

- **Théorème 9.**

1. Une similitude plane qui admet au moins trois points fixes non alignés est l'identité du plan.
2. Une similitude plane qui admet au moins deux points fixes distincts A et B est l'identité ou la symétrie d'axe (AB).

Démonstration

Commençons par remarquer que si une similitude T possède au moins deux points fixes distincts A et B alors elle a pour rapport $\lambda = \dfrac{T(\mathrm{A})T(\mathrm{B})}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = 1$ donc que c'est une isométrie.

1. Soit T une similitude plane admettant (au moins) trois points fixes A, B et C non alignés.
D'après la remarque précédente, T est une isométrie. Prouvons alors, par un raisonnement par l'absurde, que T est l'identité du plan.
♦ Supposons que T ne soit pas l'identité du plan. Il existe alors un point M dont l'image par T est distincte de M. Tout point fixe I de T est alors tel que $\mathrm{I}T(\mathrm{M}) = \mathrm{IM}$. On en déduit que tous les points fixes appartiennent à la médiatrice du segment $[\mathrm{M}T(\mathrm{M})]$, ce qui est contradictoire avec le fait que T admet trois points fixes A, B et C non alignés. ♦
2. . Soit T une similitude plane admettant (au moins) deux points fixes A et B distincts. Considérons un point C n'appartenant pas à la droite (AB).
<u>Premier cas</u> : C est fixe. Dans ce cas, T est, d'après 1, l'identité du plan.
<u>Deuxième cas</u> : C n'est pas fixe. Dans ce cas, d'après la remarque préliminaire, T est une isométrie. A et B étant fixes, on a $\mathrm{A}T(\mathrm{C}) = \mathrm{AC}$ et $\mathrm{B}T(\mathrm{C}) = \mathrm{BC}$. On en déduit que la droite (AB) est la médiatrice du segment $[\mathrm{C}T(\mathrm{C})]$. Notons s la symétrie axiale d'axe (AB). On constate alors que la composée $s \circ T$ laisse fixes les points A, B et C. non alignés. Comme cette composée est une similitude (en tant que composée de similitudes) on peut lui appliquer le résultat du 1. On en déduit que $s \circ T$ est l'identité du plan ce qui prouve que T est la symétrie s d'axe (AB).

- **Conséquence**

Une similitude plane non directe T peut s'écrire sous la forme $T = \sigma \circ s$ où s est une symétrie axiale et σ une similitude directe.

Démonstration

Soit T une similitude plane non directe.
Considérons deux points A et B distincts. Les points images T(A) et T(B) sont également distincts.
D'après le théorème 8, il existe une similitude directe σ qui transforme A en T(A) et B en T(B).
Notons σ' la similitude réciproque de σ et considérons la composée $\sigma' \circ T$.

$\sigma' \circ T$ est une similitude en tant que composée de similitudes et elle admet A et B comme points fixes. On peut donc lui appliquer le théorème 9 .
Or $\sigma' \circ T$ n'est pas l'identité, sinon, on aurait $T = \sigma$ ce qui est contradictoire avec le fait que T et σ sont des similitudes respectivement non directe et directe. On déduit alors du théorème 9 que $\sigma' \circ T$ est une symétrie axiale s. De l'égalité $\sigma' \circ T = s$, en composant « à gauche » par σ, on déduit $T = \sigma \circ s$.

- **Théorème 10.**

Les similitudes (planes) non directes sont les transformations d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z} + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

Démonstration

Soit T une similitude plane non directe. Dans le plan complexe, on applique le raisonnement précédent aux points A d'affixe 0 et B d'affixe 1. On en déduit que T peut s'écrire sous la forme $T = \sigma \circ s$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et σ une similitude directe. On sait que s a pour écriture complexe $z \mapsto \bar{z}$ et que la similitude directe σ a une écriture complexe du type $z \mapsto az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$). On en déduit que la composée T a une écriture complexe du type $z \mapsto a\bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$).

On notera que l'étude de la forme géométrique des similitudes d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z} + b$ n'est pas au programme.

2. Effet d'une similitude non directe sur un angle orienté. Similitude indirecte.

- **Théorème 11 et définition**

Toute similitude plane non directe, transforme tout angle orienté en l'angle de mesure opposée.
Autrement dit si T est une similitude plane non directe alors, pour tous points M, N, P et Q (avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$), on a :

$$\left(\overrightarrow{T(\mathrm{M})T(\mathrm{N})}, \overrightarrow{T(\mathrm{P})T(\mathrm{Q})}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right).$$

Une similitude plane non directe est appelée similitude plane indirecte.

Démonstration

Conséquence immédiate de la forme géométrique $T = \sigma \circ s$ obtenue précédemment, sachant que la similitude directe σ conserve (par définition) les angles orientés et que la symétrie axiale s transforme tout angle orienté en l'angle de mesure opposée. Ce dernier résultat est déjà connu des élèves.
Il est peut-être aussi intéressant d'en faire une démonstration par les nombres complexes, à partir de l'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z} + b$ de T :

Soit M, N, P et Q (avec $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$) des points du plan d'affixes respectives m, n, p et q.
Les points images T(M), T(N), T(P) et T(Q) ont pour affixes respectives $m' = a\overline{m} + b$, $n' = a\overline{n} + b$, $p' = a\overline{p} + b$ et $q' = a\overline{q} + b$.

Un calcul simple permet d'aboutir à l'égalité $\dfrac{q'-p'}{n'-m'} = \dfrac{\overline{q} - \overline{p}}{\overline{n} - \overline{m}} = \overline{\left(\dfrac{q-p}{m-n}\right)}$.

On en déduit que $\arg\left(\dfrac{q'-p'}{n'-m'}\right) = -\arg\left(\dfrac{q-p}{n-p}\right)$. D'où le résultat sur les mesures des angles.

3. Effet des similitudes sur certaines configurations.

La forme $T = \sigma \circ s$ obtenue dans le paragraphe 1 ou des calculs dans $\mathbb{C}$ à partir de l'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z} + b$ montrent que l'effet d'une similitude indirecte sur un barycentre, une droite, un segment, un cercle se déduit de l'effet sur chacune de ces configurations par une similitude directe.

Cela achève les connaissances exigibles sur les similitudes quelconques. En particulier, les élèves n'ont pas à connaître leur forme réduite à savoir :

- *Une similitude indirecte de rapport 1 (antidéplacement) est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur nul ou directeur de l'axe de la symétrie.*
- *Une similitude indirecte de rapport k différent de 1 admet un unique point invariant Ω et est le composée commutative d'une homothétie de centre Ω et de rapport k, et d'une symétrie axiale dont l'axe passe par le point Ω.*

Il est toutefois possible de faire des exercices sur ce genre de thème, mais le cas des similitudes directes doit être privilégié.
La détermination de la composée de deux symétries axiales n'étant pas au programme, les exercices y ayant recours doivent être accompagnés des indications utiles.

VIII Triangles de même forme ou triangles semblables

1°) Triangles semblables en classe de Seconde

- **Définition**

Dire que des triangles sont de même forme signifie qu'ils ont des angles deux à deux égaux.
On convient alors que l'on écrit les sommets homologues respectifs dans le même ordre.
Autrement dit :

Dire que les triangles ABC et A'B'C' sont de même forme signifie que l'on a $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$ et $\hat{C}=\hat{C}'$. On dit aussi dans ce cas que les triangles ABC et A'B'C' sont des triangles semblables.

- **Propriété caractéristique**

1. Si les triangles ABC et A'B'C' sont de même forme alors il existe un même nombre réel $\lambda > 0$ vérifiant les trois égalités : $A'B' = \lambda\, AB$, $B'C' = \lambda\, BC$ et $C'A' = \lambda\, CA$. 2. Réciproquement, s'il existe un même nombre réel $\lambda > 0$ vérifiant les trois égalités : $A'B' = \lambda\, AB$, $B'C' = \lambda\, BC$ et $C'A' = \lambda\, CA$, alors les triangles ABC et A'B'C' sont de même forme.

Selon le niveau de la classe de Seconde, on peut justifier l'implication 1 en s'appuyant sur l'étude des triangles isométriques et les propriétés de Thalès. Mais, il semble que la plupart des professeurs admettent à ce niveau le résultat, préférant garder du temps pour faire fonctionner cette propriété caractéristique dans des études de configurations.

Le coefficient d'agrandissement-réduction λ est appelé « rapport de similitude » !

2°) Triangles semblables et similitudes en Terminale S (spécialité).

- **Théorème 12.**

Etant donnés deux triangles ABC et A'B'C', les trois propriétés suivantes sont équivalentes.
1. Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables, c'est-à-dire $\hat{A}=\hat{A'}$, $\hat{B}=\hat{B'}$ et $\hat{C}=\hat{C'}$.
2. Il existe un même nombre réel $\lambda>0$ vérifiant $A'B'=\lambda\, AB$, $B'C'=\lambda\, BC$ et $A'C'=\lambda\, AC$.
3. Il existe une similitude *T* qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

Démonstration de : 1 implique 2.

Soit ABC et A'B'C' des triangles semblables c'est-à-dire tels que $\hat{A}=\hat{A'}$, $\hat{B}=\hat{B'}$ et $\hat{C}=\hat{C'}$.
Les formules reliant les sinus des angles, les côtés d'un triangle et l'aire montrent la proportionnalité entre les côtés d'un triangle et les sinus des angles opposés. Puisque les deux triangles ABC et A'B'C' ont les mêmes angles, on en déduit la proportionnalité de leurs côtés, ce qui établit 2.

Démonstration de : 2 implique 3. On suppose 2.

D'après le théorème 8, il existe une et une seule similitude directe *T* qui transforme A en A' et B en B'.
Premier cas : $T(C)=C'$.
Dans ce cas la similitude *T* transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C' et répond donc au problème posé.
Deuxième cas : $T(C)\neq C'$.
Recherchons une autre similitude qui transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'.
Posons $T(C)=C''$. Notons μ le rapport de la similitude directe *T*. Puisque *T* transforme A en A', B en B', et C en C'', on a $A'B'=\mu\, AB$, $B'C''=\mu\, BC$ et $A'C''=\mu\, AC$ par définition du rapport d'une similitude. On déduit alors de l'hypothèse 2 les égalités $\mu=\lambda$, $A'C'=A'C''$ et $B'C'=B'C''$.
Les points C' et C'' étant distincts par hypothèse, les égalités $A'C'=A'C''$ et $B'C'=B'C''$ montrent que la droite (A' B') est la médiatrice du segment [C'C'']. Notons *S* la symétrie axiale d'axe (A'B').
On vérifie alors aisément que la composée $S\circ T$ transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C', ce qui achève la démonstration.

Démonstration de : 3 implique 1. Ce résultat a déjà été établi (théorème 3).

Il résulte de l'énoncé précédent que deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si il existe une similitude plane *T* qui transforme A en A', B en B' et C en C'. On remarque alors que le coefficient d'agrandissement-réduction, appelé rapport de similitude dès la classe de seconde est le rapport de la similitude *T*.

Dans les études de configurations, la présence de triangles de « même forme » peut suggérer le recours à des similitudes, voire des isométries.

3°) Triangles directement semblables et triangles inversement semblables.

Considérons deux triangles semblables ABC et A'B'C'. Il existe donc une similitude *T* qui transforme A en A', B en B' et C en C'.
On a deux possibilités :

1. $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
   Dans ce cas, la similitude *T* est nécessairement directe et on a alors :
   $\left(\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'A'}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$.
2. $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
   Dans ce cas, la similitude *T* est nécessairement indirecte et on a alors :
   $\left(\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'A'}\right)=-\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right)=-\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$.

- **Définitions.**

Deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants.
Deux triangles semblables sont inversement semblables si les angles orientés correspondants sont opposés.

Remarques sur les programmes.

Les équivalences du théorème 12 ne sont pas explicitement au programme. Toutefois :

1. *On démontrera qu'une similitude envoie tout triangle sur un triangle semblable et qu'elle conserve les angles.*
   Réciproquement, toute transformation ayant l'une de ces propriétés est une similitude mais ce résultat n'est pas au programme : le professeur conserve la liberté de le faire ou non en exercice.
2. *On démontrera qu'une similitude directe envoie tout triangle sur un triangle directement semblable. En exercice, on peut établir la réciproque : étant donnés deux triangles directement semblables, il existe une unique similitude directe qui envoie le premier sur le second.*
3. *On peut aussi remarquer qu'une transformation du plan est une similitude directe si et seulement si elle conserve les angles orientés (car elle envoie alors tout triangle sur un triangle directement semblable) mais il n'est pas indispensable d'entrer dans ces détails.*

- **Propriété**

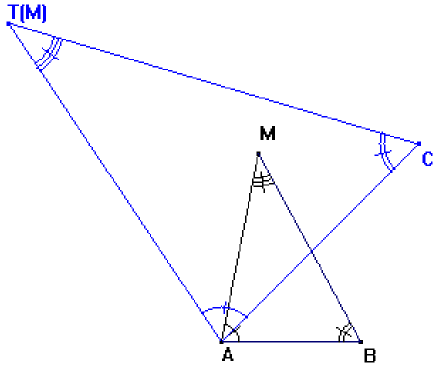
Soit *T* une similitude directe à centre, Ω le centre de *T*, P et Q deux points quelconques du plan distincts et distincts de Ω, P' et Q' les images respectives des points P et Q par *T*. Alors :
1. Les triangles ΩPQ et ΩP'Q' sont directement semblables ;
2. les triangles ΩPP' et ΩQQ' sont directement semblables.

Démonstration.

1. Le point Ω étant invariant par la similitude directe *T*, celle-ci envoie le triangle ΩPQ sur le triangle ΩP'Q' directement semblable.
2. Pour prouver que les triangles ΩPP' et ΩQQ' sont directement semblables, il suffit de trouver une similitude directe qui *S* de centre Ω qui transforme P en Q et P' en Q'.
   Notons ω, *p*, *q*, *p*' et *q*' les affixes respectives des points Ω, P, Q, P' et Q'.
   On sait qu'une similitude directe de centre Ω est caractérisée par une écriture complexe du type $z \mapsto z'$ avec $z'-\omega = a\,(z-\omega)$, où *a* est un nombre complexe non nul.
   T est une similitude directe de centre Ω donc il existe un nombre complexe non nul *a* tel que l'écriture complexe de *T* soit $z \mapsto z'$ avec $z'-\omega = a\,(z-\omega)$.
   Or *T* transforme P en P' et Q en Q' donc on a les égalités : $p'-\omega = a\,(p-\omega)$ et $q'-\omega = a\,(q-\omega)$.
   On en déduit l'égalité $\dfrac{q'-\omega}{p'-\omega} = \dfrac{q-\omega}{p-\omega}$. Ainsi, il existe un nombre complexe *a*' non nul tel que $q'-\omega = a'\,(p'-\omega)$ et $q-\omega = a'\,(p-\omega)$. La similitude directe d'écriture complexe $z \mapsto z'$ avec $z'-\omega = a'(z-\omega)$ transforme donc P en Q et P' en Q'. Comme elle a pour centre Ω, elle envoie le triangle ΩPP' sur le triangle ΩQQ' directement semblable.

Conséquence. Etant donnés des points A, B et C tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. Notons *T* la similitude directe de centre A qui transforme B et C. Alors pour tout point M distinct de A,

les triangles ABM et AC*T*(M) sont directement semblables,



les triangles ABC et AM*T*(M) sont directement semblables, et on en déduit, par exemple que les angles du triangle AM*T*(M) sont indépendants du point M.