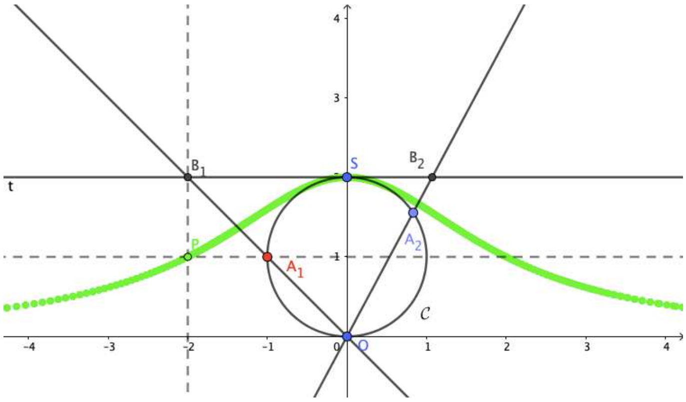
Olympiades 2024 :
Éléments de correction de l'exercice académique N°1
Sorcière d'Agnesi

Partie A



Partie B

1. Relation entre les coordonnées de P, l'abscisse de A et d :

• Coordonnées de B :

La droite (t), tangente à $\mathscr{C}$ en S admet pour équation cartésienne réduite $y = d$.

La droite (OA), passant par $O(0\ ;\ 0)$ et $A(x_A\ ;\ y_A)$, avec $x_A \neq 0$ et $(x_A\ ;\ y_A) \neq (0\ ;\ 0)$, admet pour équation cartésienne réduite $y = \dfrac{y_A}{x_A}x$.

Le point B, intersection de (d) et (OA) a pour coordonnées $\left(d\dfrac{x_A}{y_A}\ ;\ d\right)$.

• Coordonnées de P :

Le point P a pour abscisse celle de B et pour ordonnée celle de A donc $x = d\dfrac{x_A}{y_A}$ et $y = y_A$ donc on en déduit l'égalité $x = d\dfrac{x_A}{y}$, soit $xy = x_A d$.

Autre méthode :

Notons A' le projeté orthogonal de A sur (OS).

- Les droites (AA') et (BS) sont parallèles car toutes les deux perpendiculaires à l'axe des ordonnées.
- B, A, O et S, A', O sont alignés.
- (BA) et (SA') sont sécantes en O.

D'après le théorème de Thalès, on a donc $\dfrac{OS}{OA'} = \dfrac{BS}{AA'}$ soit $\dfrac{d}{y} = \dfrac{x}{x_A}$ et donc $xy = x_A d$.

2. On a $A \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega A = \dfrac{d}{2}$ car $\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{d}{2}$.

Ainsi $A \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega A = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow \Omega A^2 = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ car $\Omega A > 0$ et $\dfrac{d}{2} > 0$.

En utilisant les coordonnées des points Ω et A dans le repère orthonormé on a :

$$\begin{aligned}
\Omega A^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 = \frac{d^2}{4} \\
&\Leftrightarrow x_A^2 + \left(y_A - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} \\
&\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 - dy_A + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{4} \\
&\Leftrightarrow x_A^2 = dy - y^2 \text{ car } y_A = y
\end{aligned}$$

3. Le réel d étant non nul, l'égalité $xy = x_A d$ de la première question de la partie B équivaut à $x_A = \dfrac{xy}{d}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} x_A = \frac{xy}{d} &\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{d}\right)^2 = dy - y^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{d^2} = dy - y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2y^2 = d^3y - d^2y^2 \\ &\Leftrightarrow y^2\left(x^2+d^2\right) = d^3y \\ &\Leftrightarrow y\left(x^2+d^2\right) = d^3 \text{ car } y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{d^3}{x^2+d^2}. \end{aligned}$$

4. Si le point A est confondu avec le point S, la droite (OA) est la droite (OS).

Les points B et S sont alors confondus tout comme les points P et S.

Le point P a donc pour coordonnées $(0\ ;\ d)$, donc $x = 0$ et $y = d$.

Ainsi $\dfrac{d^3}{d^2+x^2} = \dfrac{d^3}{d^2+0^2} = d = y$ et les coordonnées de P vérifient donc l'équation établie à la question 3.

Partie C

1. L'ensemble des nombres réels est symétrique par rapport à 0.

De plus, on a, par parité de la fonction carré, $f(-x) = \dfrac{d^3}{d^2+(-x)^2} = f(x)$.

On peut conclure que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

N'étant pas constante, elle ne peut pas être simultanément impaire.

2. La fonction f est rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{-2d^3x}{(d^2+x^2)^2}$.

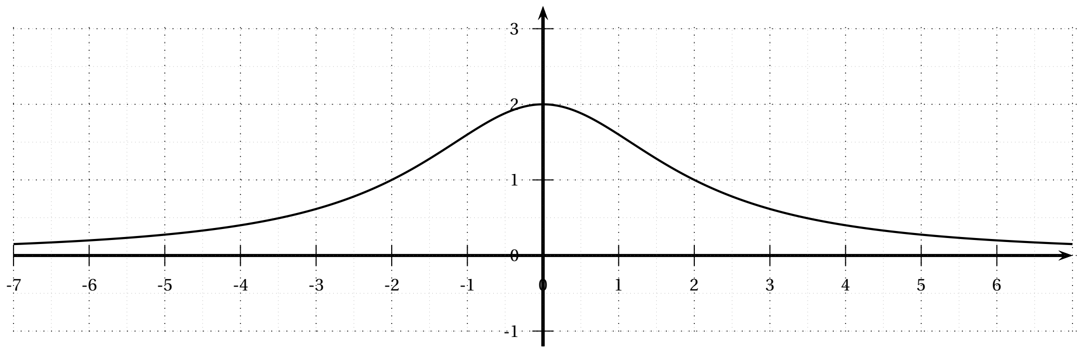
Comme $d > 0$ et comme pour tout réel x, $(d^2+x^2)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-2x$ et donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f		$\nearrow$	d	$\searrow$	

3. Pour $d = 2$, le tableau de valeurs (arrondies au centième) est :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$0,28$	$0,4$	$0,62$	1	$1,6$	2	$1,6$	1	$0,62$	$0,4$	$0,28$

Allure de la courbe représentative de f :



Partie D

1. $f(x) = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow \dfrac{d^3}{d^2+x^2} = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow 2d^3 = d(d^2+x^2) \Leftrightarrow d^2 = x^2$ car $d \neq 0$.

Ainsi $f(x) = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow x = -d$ ou $x = d$.

2. La solution positive de l'équation précédente est d. Le point P a donc pour coordonnées $(d\ ;\ f(d))$ c'est à dire $\left(d, \dfrac{d}{2}\right)$ car d est solution de l'équation $f(x) = \dfrac{d}{2}$.
Comme le point P a pour abscisse d alors le point B a pour coordonnées $(d\ ;\ d)$. Ainsi, on en déduit que le triangle BSA est isocèle rectangle en S et donc que $\widehat{AOS} = 45$ degrés.

3. $f(x) = \dfrac{3d}{4} \Leftrightarrow \dfrac{d^3}{d^2+x^2} = \dfrac{3d}{4} \Leftrightarrow 4d^3 = 3d(d^2+x^2) \Leftrightarrow d^2 = 3x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}d^2 = x^2$ car $d \neq 0$.
Ainsi,
$f(x) = \dfrac{3d}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}d$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}d$ soit $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ ou $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$.
Le point P a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d\ ;\ f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d\right)\right)$ soit $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d\ ;\ \dfrac{3d}{4}\right)$.
Si P a pour abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$, le point B a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}d\ ;\ d\right)$.

Le triangle OSB est rectangle en S et $\tan\left(\widehat{BOS}\right) = \dfrac{SB}{SO} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}d}{d} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\widehat{BOS} = \text{Arctan}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 30$ degrés.
Comme O, B et A sont alignés alors $\widehat{AOS} = \widehat{BOS} = 30$ degrés.

4. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'Agnesi en un point d'abscisse a admet pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.
Chercher la valeur de a en laquelle ce coefficient directeur est minimal, revient à déterminer le minimum de la fonction f'.
On cherche donc à étudier le sens de variations de la fonction f'. Comme f' est dérivable sur $\mathbf{R}$, étudier son sens de variation revient à étudier le signe de f''.
D'après le logiciel de calcul formel (entrée 2), pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{-2d^5 + 6d^3x^2}{(x^2+d^2)^3}$.
Pour tout réel x, $(x^2+d^2)^3 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $-2d^5 + 6d^3x^2$
Comme $d \neq 0$, $-2d^5 + 6d^3x^2 \Leftrightarrow -2d^2 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{d^2}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ ou $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ soit $x = -\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$
On a donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'		$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	

Pour tout $x \in \left]-\infty, \dfrac{d\sqrt{3}}{3}\right]$, $f'(x) = \dfrac{-2xd^3}{\left(x^2+d^2\right)^2} > 0$.
Comme $f'\left(\dfrac{d\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ alors le minimum de la fonction f' sur $\mathbf{R}$ est donc atteint pour $x = \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$.
D'après la question précédente, cette valeur correspond au cas où l'angle $\widehat{AOS}$ mesure 30 degrés.

Olympiades 2024 :
Éléments de correction de l'exercice académique N°2
problème des moyennes

Partie A

On donne dans le tableau ci-dessous les partitions de E_3 et calculs des moyennes des moyennes de chacune d'elles :

Liste des partitions de E_3	Valeur de la moyenne des moyennes
{{1}, {2}, {3}}	2
{{1}, {2, 3}}	1,75
{{2}, {1, 3}}	2
{{3}, {1, 2}}	2,25
{{1, 2, 3}}	2

Une unique partition rend minimale la moyenne des moyennes des sous-parties : {{1}, {2, 3}}.

Partie B

1. La liste des partitions P_k pour k entier compris entre 1 et 4 :

$$P_1 = \{\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\}\,;\ P_2 = \{\{1\},\ \{2,\ 3,\ 4\}\}\,;\ P_3 = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3,\ 4\}\} \text{ et } P_4 = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\}\}.$$

2. La moyenne des moyennes de P_1 est $\dfrac{\frac{1+2+3+4}{4}}{1} = 2,5$.

La moyenne des moyennes de P_2 est $\dfrac{1+\frac{2+3+4}{3}}{2} = 2$.

La moyenne des moyennes de P_3 est $\dfrac{1+2+\frac{3+4}{2}}{3} = \dfrac{6,5}{3} = \dfrac{13}{6} \approx 2,17$.

La moyenne des moyennes de P_4 est $\dfrac{1+2+3+4}{4} = 2,5$.

3. La valeur minimale de la moyenne des moyennes des sous-ensembles de E_4 de la forme P_k vaut 2.
Une seule partition réalise cette moyenne des moyennes de l'ensemble des partitions P_k de E_4 minimale : il s'agit de la partition P_2 = {{1}, {2, 3, 4}}.

Partie C

La liste des partitions de E_5 de la forme P_k pour k entier compris entre 1 et 5 ainsi que la moyennes des moyennes des parties qui les constituent est :

- P_1 = {{1, 2, 3, 4, 5}} de moyenne 3 ;
- P_2 = {{1}, {2, 3, 4, 5}} de moyenne 2,25 ;
- P_3 = {{1}, {2}, {3, 4, 5}} de moyenne $\dfrac{7}{3}$;
- P_4 = {{1}, {2}, {3}, {4, 5}} de moyenne $\dfrac{10,5}{4}$
- P_5 = {{1}, {2}, {3}, {4}, {5}} de moyenne 3.

La valeur minimale de la moyenne des moyennes des sous-ensembles de E_5 de la forme P_k vaut 2,25.
Une seule partition réalise cette moyenne des moyennes de l'ensemble des partitions P_k de E_4 minimale : il s'agit de la partition P_2 = {{1}, {2, 3, 4, 5}}.

Partie D

1. Calcul de l'expression en fonction de n et k de la moyenne des moyennes des sous-ensembles des P_k :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\left(1+2+\cdots+(k-1)+\frac{k+(k+1)+\cdots+n}{n-(k-1)}\right) &= \frac{1}{k}\left(\frac{(1+(k-1))\times(k-1)}{2}+\frac{(n+k)\times(n-(k-1))}{2\times(n-(k-1))}\right)\\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{k^2-k}{2}+\frac{n+k}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(k+\frac{n}{k}\right)
\end{aligned}$$

2. **a)** La fonction f_n est dérivable comme produit d'une constante par une somme de fonctions identité et inverse, dérivables sur $]0, n]$.

Pour tout réel $x > 0$, $f_n'(x)\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{n}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x-\sqrt{n})(x+\sqrt{n})}{x^2}\right)$

Donc $f_n'(x)$ est du signe de $(x-\sqrt{n})$ sur $]0, n]$.

Donc f_n est décroissante sur $]0, \sqrt{n}]$ et croissante sur $[\sqrt{n}, n]$.

La fonction f_n admet donc un minimum atteint en $x = \sqrt{n}$.

b) La valeur du minimum de f_n est $f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\dfrac{n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$.

3.
- Pour $n = 9$.
  L'entier $n = 9$ étant un carré parfait, la valeur minimale de l'ensemble des moyennes de moyennes de sous-ensembles est obtenue pour $P_{\sqrt{9}} = P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$ et vaut $\dfrac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9}{7}}{3} = 3$
- Pour $n = 10$.
  Comme $9 < 10 < 16$ et que $10 < 3\times4$, le minimum est pour $m = 3$, donc réalisé pour la partition $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1$
  et vaut $\dfrac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9+10}{8}}{3} = \dfrac{19}{6}$.
- Pour $n = 11$.
  Comme $9 < 11 < 16$ et que $11 < 3\times4$, le minimum est pour $m = 3$, donc réalisé pour la partition $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1$
  et vaut $\dfrac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9+10+11}{9}}{3} = \dfrac{10}{3}$.
- Pour $n = 12$.
  Comme $9 < 12 < 16$ et que $12 = 3\times 4$, le minimum est pour $m = 3$ et $m = 4$, donc réalisé pour deux partitions $P_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$ et $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$ et vaut $\dfrac{1+2+\frac{3+4+5+6+7+8+9+10,\ 11,\ 12}{10}}{3} = \dfrac{1+2+3+\frac{4+5+6+7+8+9+10,\ 11,\ 12}{9}}{4} = \dfrac{7}{2}$.
- Pour $n = 13$.
  Comme $9 < 13 < 16$ et que $13 > 3\times 4$, le minimum est pour $m = 4$, donc réalisé pour la partition $P_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}\}$ et vaut $\dfrac{1+2+3+\frac{4+5+6+7+8+9+10+11+12+13}{8}}{4} = 3{,}625$.

4. D'après la question 2., parmi toutes les partitions P_k de E_n, celles associées à la valeur minimale de la valeur des moyennes de moyennes des sous-ensembles sont déterminées par la valeur de $\sqrt{n}$.

a) Ainsi, si n est un carré parfait, $S_{\sqrt{n}} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{\sqrt{n}-1\}, \{\sqrt{n}, \sqrt{n}+1, \cdots, n\}\}$ est la partition qui rend minimale la valeur des moyennes de moyennes des sous-ensembles.

b) Sinon, il existe un entier m tel que $m < \sqrt{n} < m+1$ et la comparaison des valeurs de $f_n(m)$ et de $f_n(m+1)$ va permettre de déterminer la partition cherchée.

On a $f_n(m) = \dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{n}{m}\right)$ et $f_n(m+1) = \dfrac{1}{2}\left(m+1+\dfrac{n}{m+1}\right)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
f_n(m)-f_n(m+1) &= \frac{1}{2}\left(m+\frac{n}{m}\right)-\frac{1}{2}\left(m+1+\frac{n}{m+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-1+n\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-1+n\times\frac{1}{m(m+1)}\right)\\
&= \frac{1}{2m(m+1)}(-m(m+1)+n)
\end{aligned}$$

$f_n(m)-f_n(m+1)$ est donc du signe de $-m(m+1)+n$.

• le minimum est $f_n(m+1)$ si et seulement si $f_n(m) > f_n(m+1)$ c'est-à dire si et seulement si $n > m(m+1)$;

• le minimum est $f_n(m)$ si et seulement si $f_n(m) < f_n(m+1)$ c'est-à dire si et seulement si $n < m(m+1)$.

5. L'entier $n = 2\,024$ n'est pas un carré parfait et $44 < \sqrt{2\,024} < 45$, avec $2\,024 > 44\times 45 = 1\,980$. D'après la question précédente, le minimum est pour $m = 45$ et est réalisé uniquement par la partition P_{45} de $E_{2\,024}$.

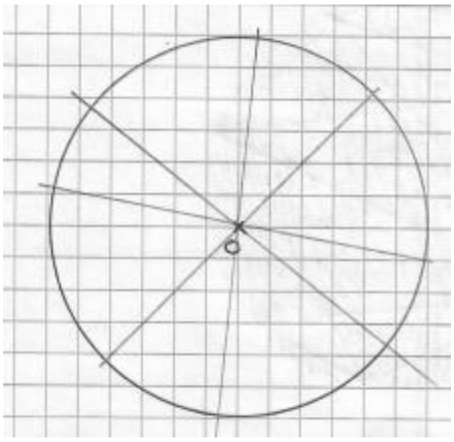
6. Il existe exactement deux partitions qui permettent à $M_2(P)$ de réaliser son minimum pour les valeurs de n qui sont le produit de deux entiers consécutifs.

En effet, lorsque $\sqrt{n}$ n'est pas entier et qu'il est encadré par les entiers m et $m+1$, on peut hésiter entre P_m et P_{m+1} pour partition optimale et elles conviennent toutes les deux dès lors que $\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{n}{k}\right) = \dfrac{1}{2}\left(k+1+\dfrac{n}{k+1}\right)$.

La résolution de cette équation d'inconnue n permet d'obtenir que $n = k(k+1)$.

Olympiades 2024
Eléments de correction de l'exercice académique N°3
Régions d'un cercle

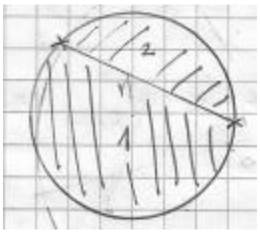
Partie A :



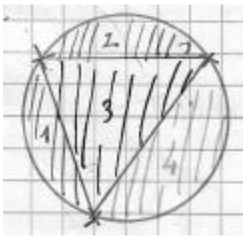
1. Avec 1 diamètre, on trouve 2 régions
2. Avec 2 diamètres : 4 régions ;
   Avec 3 diamètres : 6 régions ;
   Avec 4 diamètres : 8 régions
3. $z(k+1) = z(k) + 2$ car un diamètre rajoute deux régions.
   Donc la suite z est arithmétique de raison 2.
4. $z(k) = z(1) + (k-1) \times 2 = 2 + 2k - 2 = 2k$

Partie B :

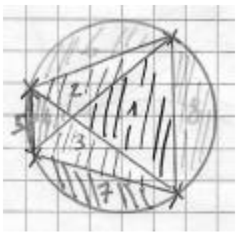
1.
   a. Pour $n = 2$: on a 2 régions,

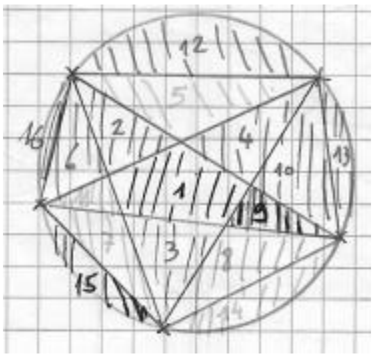
   b. Pour $n = 3$: on a 4 régions,

   c. Pour $n = 4$: on a 8 régions,

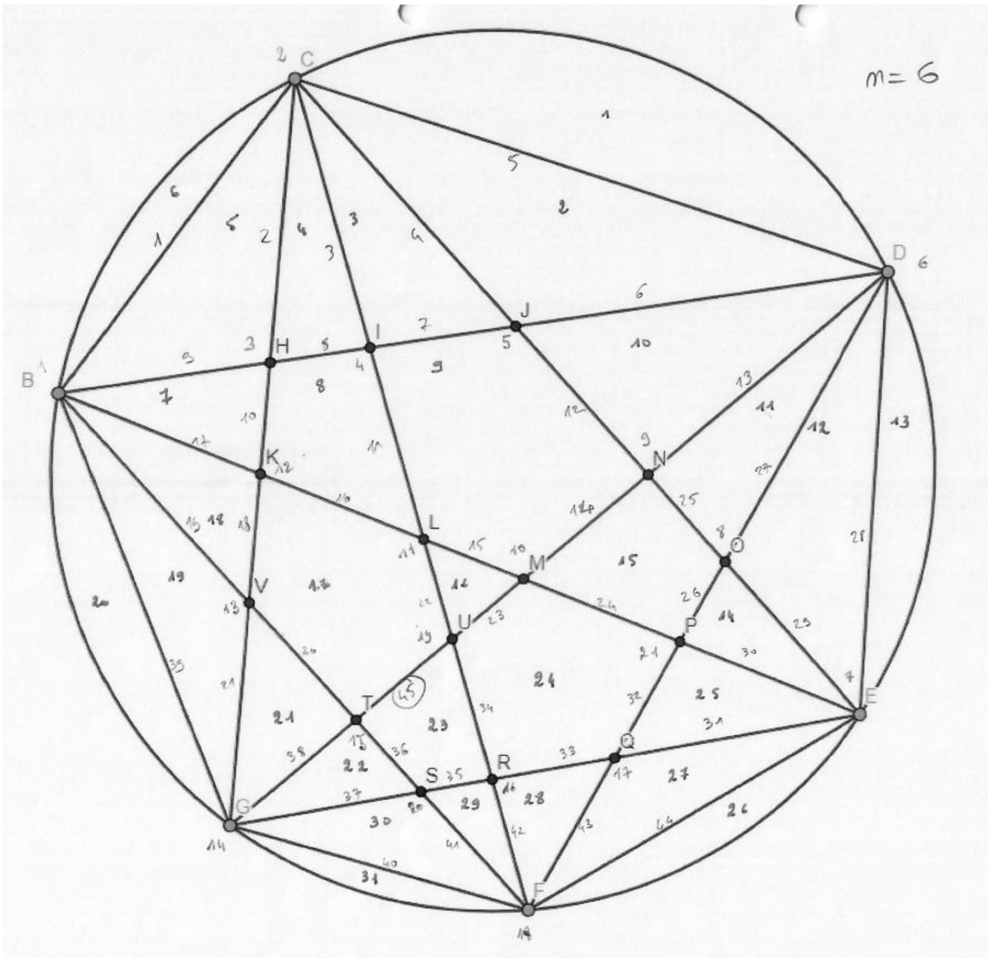
   

   d. Pour $n = 5$: on a 16 régions

   e.

2. On conjecture de $Z(n) = 2^{n-1}$
3. $Z(6) = 31$ donc la conjecture est fausse.



4. Il faut que 3 cordes ne sont pas concourantes en un même point.

Partie C :

1. Pour $n = 3$: on a 3 sommets et 3 arêtes ;
   Pour $n = 5$: on a 10 sommets et 20 arêtes ;
   Pour $n = 6$: on a 21 sommets et 45 arêtes ;
2. Pour la figure 2 : $S = 5; A = 8$. Avec la formule, on retrouve $F = 5$.
3. Pour $n = 3$: on a $S = 3$ et $A = 3$; donc $F = 2 - 3 + 3 = 2$, donc il y a 1 région intérieure (car on enlève la face infinie) et 3 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 4.
   Pour $n = 5$: on a $S = 10$ et $A = 20$; donc $F = 12$ donc il y a 11 régions intérieures (car on enlève la face infinie) et 5 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 16.
   Pour $n = 6$: on a $S = 21$ et $A = 45$; donc $F = 26$ donc il y a 25 régions intérieures (car on enlève la face infinie) et 6 régions extérieures (avec un bord comme cercle), donc on le nombre maximal de régions est 31.

Partie D :

1. Pour $n = 3$, on a 3 cordes ;
   Pour $n = 4$, on a 3+2+1=6 cordes ;
   Pour $n = 5$, on a 4+3+2+1=10 cordes.
2. $C(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(1+n-1)\times n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
3. $F = 2 + A - S = 2 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} - n$

4. Donc le nombre de faces intérieurs est : $1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}-n$ (on enlève la face extérieur).

Donc le nombre maximal de régions est : $1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$ (on rajoute les n régions avec un bord sur le cercle).

5. Pour 2024 points, le nombre maximal de régions est donc

$$1+\frac{2024(2024-1)}{2}+\frac{2024(2024-1)(2024-2)(2024-3)}{4\times3\times2\times1}=697\ 178\ 345\ 403.$$