Quelques propriétés des courbes d'Agnesi

Sommaire

Le présent document constitue un complément à l'un des exercices du sujet académique proposé aux Olympiades.

Dans tout le document, on considère le plan (l'espace au besoin) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

1. CONSTRUCTION DE LA COURBE COMME LIEU DE POINTS

Soit A le point de coordonnées $(0, a)$. On considère le cercle Γ de diamètre $[OA]$, M un point du cercle distinct de O et N le point d'intersection de la droite (OM) et la tangente en A à Γ.

La courbe d'Agnesi est le lieu des points P qui ont pour abscisse celle de N et pour ordonnée celle de M lorsque M décrit Γ (voir figure 1).

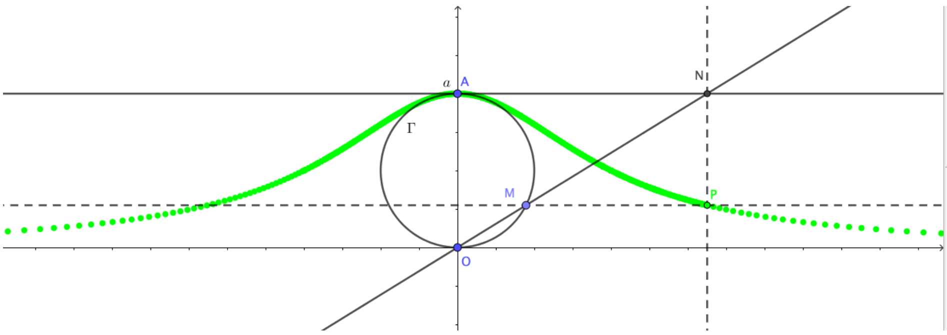

Figure 1

Voici en lien une animation de la construction point par point de la figure :
https://www.geogebra.org/m/xg7psgfp

2. PARAMÉTRISATION

Désignons par θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON})$. C'est donc un nombre de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

PROPOSITION 1

La courbe d'Agnesi est l'ensemble des points de la courbe $\theta \longmapsto P(\theta)$ définie par les équations paramétriques

$$x_P = a\tan\theta \qquad y_P = a\cos^2\theta$$

où θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration

Le triangle NOA est rectangle en A et $AN = OA\tan\theta$ d'où $x_N = a\tan\theta$ et par suite

$$x_p = a\tan\theta.$$

De plus, l'ordonnée du point P est celle de $M(x_M, y_M)$ lequel est un point du cercle Γ centré au point de coordonnées $(0, a/2)$ et de rayon $a/2$. Les réels x_M et y_M vérifient

$$x_M^2 + \left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

où de plus x_M et y_M sont liés par l'égalité

$$\tan\theta = \frac{x_M}{y_M}$$

qu'il est licite d'écrire puisque M étant distinct de O son ordonnée y_M est non nulle.

Après développement et substitution, il vient :

$$(y_M\tan\theta)^2 + y_M^2 - ay_M = 0$$

Comme $y_M \neq 0$ puisque M est distinct de O, on obtient

$$y_M = a \times \frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

soit

$$y_M = a\cos^2\theta.$$

On peut alors écrire que

$$y_P = a\cos^2\theta.$$ ■

3. ÉQUATION DE LA COURBE

Proposition 2

La courbe d'Agnesi a pour équation

$$y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$$

Démonstration

Procédons par double inclusion.

$\subset$: Nous allons exploiter l'égalité

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

ainsi que les équations paramétriques de la courbe. Pour un réel θ et de ce fait un point P de la courbe d'Agnesi fixé, puisque $a \neq 0$, on a d'une part

$$\frac{x_p}{a} = \tan\theta$$

d'où

$$1 + \left(\frac{x_p}{a}\right)^2 = 1 + \tan^2\theta$$

D'autre part, $y_P \neq 0$ puisque $y_P = y_M$ et que M est distinct de O et la paramétrisation de y_M en fonction de θ permet d'écrire

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{a}{y_P}.$$

On obtient alors par transitivité de l'égalité :

$$1+\left(\frac{x_P}{a}\right)^2=\frac{a}{y_P}$$

d'où

$$y_P=\frac{a}{1+\left(\frac{x_P}{a}\right)^2}$$

soit

$$y_P=\frac{a^3}{x_P^2+a^2}.$$

Le caractère arbitraire du choix de θ dans $\mathbb{R}$ et donc de P sur la courbe permet d'obtenir que la courbe d'Agnesi est incluse dans la courbe d'équation

$$y=\frac{a^3}{x^2+a^2}.$$

$\supset$

■

4. AIRE DE LA PORTION DE PLAN DÉLIMITÉE PAR L'AXE DES ABSCISSES ET LA COURBE

Proposition 3

L'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses et la courbe d'Agnesi est $a^2\pi$ unités d'aire.

Démonstration

On cherche à calculer $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t$. La fonction

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{a^3}{x^2+a^2}$$

est rationnelle donc continue sur son ensemble de définition.

Soit X un réel strictement positif. Par parité de f,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t=2\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, la transformation d'écriture suivante

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{a^3}{a^2\left(1+(x/a)^2\right)}\\ &=a^2\frac{1/a}{1+(x/a)^2}\end{aligned}$$

permet de faire apparaître f comme la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=a^2\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

On peut alors écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t=2a^2\lim_{X\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{X}{a}\right)-\arctan(0)\right)$$

où $\arctan(0)=0$ et, puisque $a>0$,

$$\lim_{X\to+\infty}\arctan\left(\frac{X}{a}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

On obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = a^2\pi \quad \text{u. a.}$$

Remarque : Dans le cas $a = 1$, la courbe d'Agnesi est la courbe d'équation $\frac{1}{1+x^2}$. Le dernier calcul nous donne le coefficient de normalisation $\frac{1}{\pi}$ pour obtenir une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ qui correspond à la loi de Cauchy : $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

5. VOLUME DU SOLIDE DE RÉVOLUTION OBTENU PAR ROTATION DE LA COURBE AUTOUR DE L'AXE DES ABSCISSES

Proposition 4

Le volume du solide de révolution obtenu par rotation de la courbe autour de l'axe des abscisses est $\pi^2 \frac{a^3}{2}$ unités de volume.

La figure 2 montre une représentation du solide obtenu grâce à au logiciel Geogebra 3D :

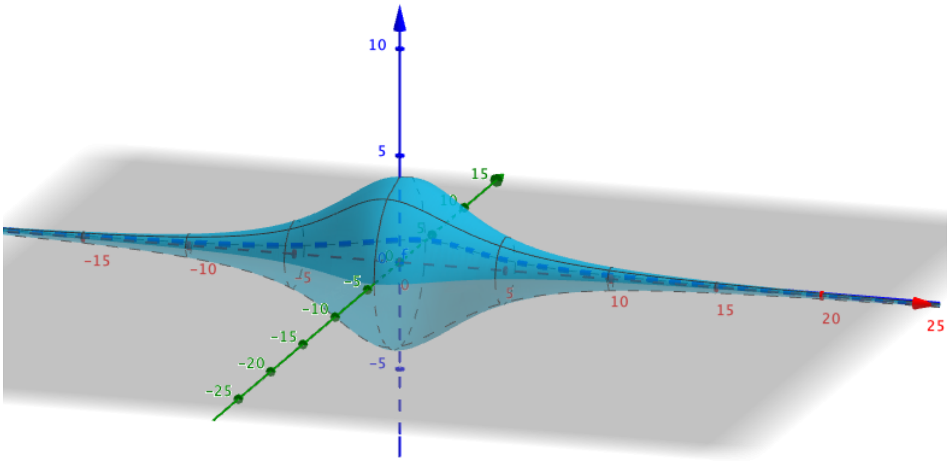

Figure 2

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif.

Si l'on considère deux réels x_1 et $x_2 = x_1 + \varepsilon$ de l'axe des abscisses et le solide délimité par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de courbe d'Agnesi d'extrémités $f(x_1)$ et $f(x_2)$, sous réserve que ε soit suffisamment petit le solide peut être assimilé à un cylindre de hauteur ε et de rayon $f(x_1)$. Le volume du solide considéré est sensiblement égal à $\pi f(x_1)^2 \times \varepsilon$.

Par sommation de tels volumes sur tous les intervalles de l'axe des abscisses de la forme $[x_1 + k \times \varepsilon, x_1 + (k+1) \times \varepsilon]$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient que le volume V du solide de révolution obtenu par rotation de la courbe autour de l'axe des abscisses est

$$V = \int_{\mathbb{R}} \pi f^2(x)\mathrm{d}x$$

soit

$$V = \int_{\mathbb{R}} \pi \left(\frac{a^3}{x^2 + a^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Reste à effectuer ce calcul.

Par symétrie de la courbe d'Agnesi par rapport à l'axe des ordonnées,

$$V = 2 \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \pi \left(\frac{a^3}{x^2 + a^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^X \pi\left(\frac{a^3}{x^2+a^2}\right)^2 \mathrm{d}x &= \pi\int_0^X \frac{a^6}{a^4\left((x/a)^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\\ &= \pi a^3\int_0^X \frac{1}{\left((x/a)^2+1\right)^2}\frac{1}{a}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

on pose $u = \frac{x}{a}$

$$= \pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u$$

On a le choix de calculer cette intégrale grâce au changement de variable $u = \tan\theta$ ou par changement d'écriture, c'est ainsi que nous allons procéder.

$$\begin{aligned}\pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u &= \pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1+u^2}{(u^2+1)^2} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u\\ &= \pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{(u^2+1)} - \frac{1}{2}u\times\frac{2u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u\\ &= \pi a^3\left(\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{(u^2+1)}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{2}u\times\frac{2u}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

on calcule cette dernière intégrale par IPP

$$\begin{aligned}&= \pi a^3\left(\arctan\frac{X}{a} - \left(\left[\frac{1}{2}u\times\frac{-1}{1+u^2}\right]_0^{\frac{X}{a}} - \int_0^{\frac{X}{a}}\frac{1}{2}\times\frac{-1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)\right)\\ &= \pi a^3\left(\arctan\frac{X}{a} + \frac{1}{2}\times\frac{X/a}{1+(X/a)^2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{X}{a}\right)\\ &= \pi a^3\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{X}{a} + \frac{1}{2}\times\frac{X/a}{1+(X/a)^2}\right)\end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque X tend vers $+\infty$, on a puisque $a > 0$,

$$\lim_{X\to+\infty}\arctan\frac{X}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{X/a}{1+(X/a)^2} = 0$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty}\pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}}\frac{1}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = \pi a^3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

soit

$$\lim_{X\to+\infty}\pi a^3\int_0^{\frac{X}{a}}\frac{1}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = \pi^2\times\frac{a^3}{4}.$$

Comme annoncé, on obtient enfin, par multiplication par 2 :

$$V = \pi^2\frac{a^3}{2} \quad \text{u. v..}$$ ■

Remarquons qu'en particulier, on a démontré que pour $a = 1$, l'aire sous la courbe d'Agnesi vaut π et que le volume engendré par rotation de la courbe autour de l'axe des abscisse vaut $\pi^2/2$.