

Rallye mathématique du Centre

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2025

Exercice Informatique-Algorithmique

Du saut de puce à la chute du robot

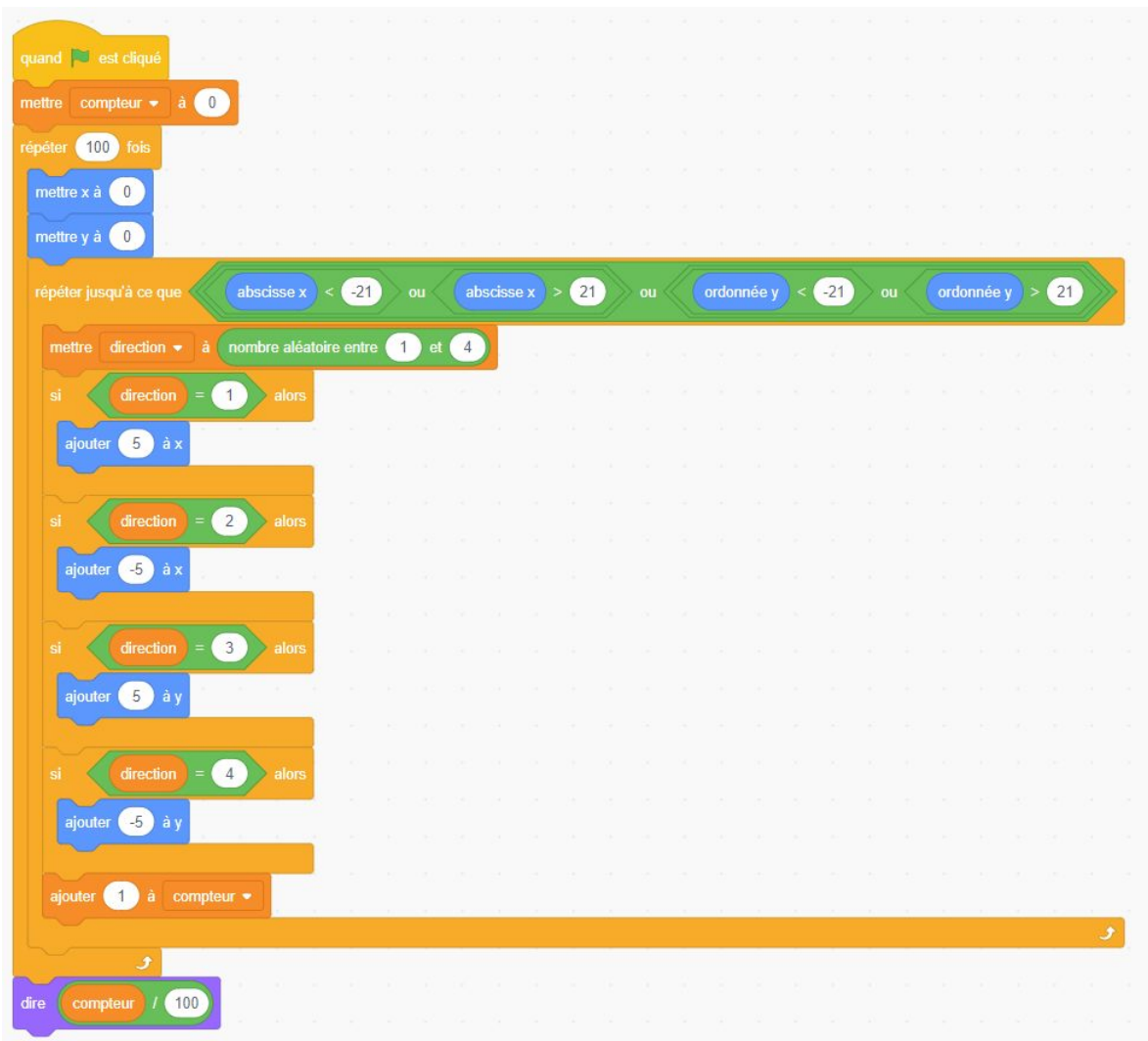
12 points

1. Le programme affiche le nombre de sauts effectués par la puce jusqu'à ce qu'elle tombe du morceau de bois.
2. Les deux programmes :



```
1 from random import*
2 compteur=0
3 for i in range (1,101):
4     abscisse=0
5     while -21<abscisse<21:
6         direction=randint(1,2)
7         if direction==1:
8             abscisse=abscisse+5
9         else:
10            abscisse=abscisse-5
11            compteur=compteur+1
12 print(compteur/100)
```

3. Les deux programmes :



```

1 from random import*
2 compteur=0
3 for i in range (1,101):
4     x=0
5     y=0
6     while -21<x<21 and -21<y<21:
7         direction=randint(1,4)
8         if direction==1:
9             x=x+5
10        else:
11            if direction==2:
12                x=x-5
13            else:
14                if direction==3:
15                    y=y+5
16                else:
17                    y=y-5
18            compteur=compteur+1
19 print(compteur/100)

```

À noter : en Python, il est tout à fait possible d'utiliser la commande *elif* et une boucle *for i in range(100)*.

Exercice n°1**Vous trouverez τ ou tard !****10 points**

1. Voir tableau ci-dessous :

Nombre de di- viseurs de n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre(s) n	1	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97	4 9 25 49	6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46 51 55 57 58 62 65 69 74 77 82 85 86 87 91 93 94 95	16 81	12 18 20 28 32 44 45 50 52 63 68 75 76 92 98 99	64	24 30 40 42 54 56 66 70 78 88	36 100	48 80	60 72 84 90 96				

- Ce sont des nombres premiers car ils ont exactement deux diviseurs : 1 et eux mêmes.
- Il y a 16 nombres τ inférieurs ou égaux à 100 : 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, 84, 88, 96.
- Les diviseurs de 2025 sont 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, et 2025. 2025 a donc 15 diviseurs or 15 est un diviseur de 2025 donc 2025 est un nombre τ .

Exercice n°2**Le codage ADFGVX****9 points**

- Le message une fois codé est FV FG DV VA AX DX AX DG VA AA AD FD DD FA DD
- Le message suivant : VX AX DA XV FV VA FV FF DV AF VA FF XD FA XF AX AV GV FF DF une fois déchiffré est : BONNE CHANCE A VOUS TOUS
- On a la même grille mais, avec un mot-clé inconnu de 3 lettres, il n'y a que 6 combinaisons possibles pour ranger les colonnes lors de la création de la grille 2.
Une seule donne une phrase qui a un sens qui est : LE RALLYE CEST TOP

Exercice n°3**En somme, c'est un produit !****9 points**

Soit A le nombre choisi, l'idée est de décomposer le nombre A, le plus possible, en tranches de taille 3 donc écrire A comme somme de 3. Si A n'est pas divisible par 3, on ne peut pas faire des tranches égales, donc on remplace le dernier 3 par 2 ou par 4 (selon le reste dans la division par 3), pour éviter les 1 dans la décomposition, pour que la somme fasse A.

1. Ainsi :

pour 12 : $12 = 3 + 3 + 3 + 3$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

pour 11 : $11 = 3 + 3 + 3 + 2$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$.

pour 10 : $10 = 3 + 3 + 4$, donc le plus grand produit est $3 \times 3 \times 4 = 36$

car la décomposition $10 = 3 + 3 + 3 + 1$ donne un plus petit produit (27).

À noter : remplacer 4 par 2×2 ne change pas le résultat, une autre décomposition possible est : $10 = 3 + 3 + 2 + 2$.

2. Pour 40 : $40 = 13 \times 3 + 1$ mais il est préférable de choisir $40 = 12 \times 3 + 4$, donc le plus grand produit est $3^{12} \times 4 = 2\,125\,764$.

Exercice n°4**Deux cercles pour une enseigne****12 points**

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :
 $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,2$ cm.

En utilisant le théorème de Thalès avec les parallèles (AB) et (HG) on a :

$$\frac{CA}{CH} = \frac{CB}{CG} = \frac{AB}{HG} \text{ donc } \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+7} = \frac{3}{CG} = \frac{3}{HG}$$

$$\text{donc } CG = HG = \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2}$$

CDEF est un rectangle car il a 4 angles droits et comme le triangle ABC est rectangle isocèle en B, $\widehat{ACB} = \widehat{DCA} = 45^\circ$ donc le triangle CDE est rectangle isocèle en D donc le rectangle CDEF a 2 côtés consécutifs de même longueur donc c'est un carré.

$$\text{Ainsi } CD = DE = EF = FC = \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4.$$

$$\text{Donc } \ell(\text{ABCDEFGHA}) = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA$$

$$\ell(\text{ABCDEFGHA}) = 3 + 3 + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right) + 4 + \frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 7$$

$$\ell(\text{ABCDEFGHA}) = 41 + 14\sqrt{2}$$

Donc la longueur du chemin est environ 60,8 cm.

$$\text{Aire (enseigne)} = \text{Aire(CDEF)} - \text{Aire(CHG)} + \text{Aire(ABC)}$$

$$\text{Aire (enseigne)} = \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right)^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{6 + 7\sqrt{2}}{2} + 4 \right)^2 + \frac{1}{2} \times 3^2$$

$$\text{Aire (enseigne)} \approx 115,7 \text{ cm}^2$$

Exercice n°5**Switch the lights on****4 points**

Dans le tableau suivant : une case blanche signifie une ampoule éteinte et une case grise signifie une ampoule allumée.

Au départ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé C	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé E	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Après avoir pressé B	1	2	3	4	5	6	7	8	9

En appuyant sur A, C, E et B on peut donc bien allumer toutes les lumières. Mais il y a d'autres possibilités, toujours avec A, C, E et B dans n'importe quel ordre. On peut aussi appuyer deux fois sur le même interrupteur, par exemple D, dans une séquence avec A, C, E et B.

Exercice n°6**Jetez-vous à l'eau !****9 points**

- Chemin de Laetitia : $DBCEFA = 100 + 100\sqrt{2} + 100 + 100\sqrt{2} + 100 = 300 + 200\sqrt{2} \approx 583$
 Chemin de Philippe : $DCFBEA = 200 \times 2 + 100\sqrt{5} = 400 + 100\sqrt{5} \approx 623$.

Le plus long est celui de Philippe.

Celui de Cécile peut être :

$$DCBF EA = 100 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100 = 200 + 200\sqrt{2} + 100\sqrt{5} \approx 706$$

- Voici un exemple de parcours le plus long :
 $DEBHFCKGA = 100 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} + 100\sqrt{2} + 100 = 200 + 400\sqrt{2} + 200\sqrt{5} \approx 1213$

Exercice n°7

Le ² magique d'ln

9 points

1. Les sommes de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale sont égales à 81.

Pour les lignes :

Pour les colonnes :

Pour les

diagonales :

$$22 + 4 + 27 + 28 = 81$$

$$22 + 30 + 8 + 21 = 81$$

$$22 + 25 + 24 + 10 =$$

81

$$30 + 25 + 12 + 14 = 81$$

$$4 + 25 + 20 + 32 = 81$$

$$28 + 12 + 20$$

+ 21 = 81

$$8 + 20 + 24 + 29 = 81$$

$$27 + 12 + 24 + 18 = 81$$

$$21 + 32 + 18 + 10 = 81$$

$$28 + 14 + 29 + 10 = 81$$

Ce carré magique est bien construit à la manière d'Hélène car



C + x 20 + 2 = 22	B - x - z 12 - 2 - 6 = 4	A - y + z 25 - 4 + 6 = 27	D + y 24 + 4 = 28
D + z 24 + 6 = 30	A 25	B 12	C - z 20 - 6 = 20
B + y - x - z 12 + 4 - 2 - 6 = 8	C 20	D 24	A - y + x + z 25 - 4 + 2 + 6 = 29
A - y 25 - 4 = 21	D + x + z 24 + 2 + 6 = 32	C + y - z 20 + 4 - 6 = 18	B - x 12 - 2 = 10

- 2.

Pour les lignes :

$$C + x + B - x - z + A - y + z + D + y = A + B + C + D$$

$$D + z + A + B + C - z = A + B + C + D$$

$$B + y - x - z + C + D + A - y + x + z = A + B + C + D$$

$$A - y + D + x + z + C + y - z + B - x = A + B + C + D$$

Pour les colonnes :

$$C + x + D + z + B + y - x - z + A - y = A + B + C + D$$

$$B - x - z + A + C + D + x + z = A + B + C + D$$

$$A - y + z + B + D + C + y - z = A + B + C + D$$

$$D + y + C - z + A - y + x + z + B - x = A + B + C + D$$

Pour les diagonales :

$$C + x + A + D + B - x = A + B + C + D$$

$$D + y + B + C + A - y = A + B + C + D$$

Donc c'est bien un carré magique.

3. Voici un exemple de bonne réponse :

on prend $x = 2$ $y = 4$ et $z = 1$.

$C + x$ 22	$B - x - z$ 0	$A - y + z$ 10	$D + y$ 29
$D + z$ 26	A 13	B 3	$C - z$ 19
$B + y - x - z$ 4	C 20	D 25	$A - y + x + z$ 12
$A - y$ 9	$D + x + z$ 28	$C + y - z$ 23	$B - x$ 1

Exercice n°8

Du fil au câble

9 points

1. Dans le triangle AME , rectangle en A , on applique le théorème de Pythagore :
 $ME = \sqrt{MA^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

Dans le triangle BEC , rectangle en B , on applique le théorème de Pythagore :
 $EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 17} = \sqrt{33}$.

Donc $l = ME + EC = \sqrt{17} + \sqrt{33} \approx 9,86$.

2. Posons $AE = x$, dans le triangle AME , rectangle en A , on applique le théorème de Pythagore :
 $ME = \sqrt{MA^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{1 + x^2}$.

Dans le triangle BEC , rectangle en B , on applique le théorème de Pythagore :
 $EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{(8 - x)^2 + 17} = \sqrt{x^2 - 16x + 81}$.

Donc $l = ME + EC = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{(8 - x)^2 + 17}$.

À l'aide d'un tableur, on trouve une longueur minimale de fil pour $AE \approx 1,56$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	x							
3	0	10		1	9,53825197		1,5	9,5001778
4	0,5	9,676655373		1,1	9,52464146		1,51	9,50006425
5	1	9,538251967		1,2	9,51440808		1,52	9,49997128
6	1,5	9,500177797		1,3	9,50714171		1,53	9,49989867
7	2	9,516177867		1,4	9,50249564		1,54	9,49984619
8	2,5	9,566445946		1,5	9,5001778		1,55	9,49981365
9	3	9,643018359		1,6	9,49994275		1,56	9,49980083
10	3,5	9,743332753		1,7	9,50158449		1,57	9,49980752
11	4	9,867668272		1,8	9,50493022		1,58	9,49983354
12	4,5	10,01809914		1,9	9,50983511		1,59	9,49987868
13	5	10,19803903		2	9,51617787		1,6	9,49994275
14	5,5	10,41199532		2,1	9,52385704		1,61	9,50002556
15	6	10,66533823		2,2	9,53278794		1,62	9,50012693
16	6,5	10,96395541		2,3	9,54290018		1,63	9,50024666
17	7	11,3137085		2,4	9,55413546		1,64	9,50038459
18	7,5	11,71968491		2,5	9,56644595		1,65	9,50054053
19	8	12,18536337		2,6	9,57979276		1,66	9,50071432
20								