ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Énoncés académiques

Durée : 2h00

à la suite de l'épreuve nationale et de 10 minutes de pause

L'usage des calculatrices est autorisé.

Ce sujet comporte trois exercices et dix pages.

*Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de deux ou de trois **:***

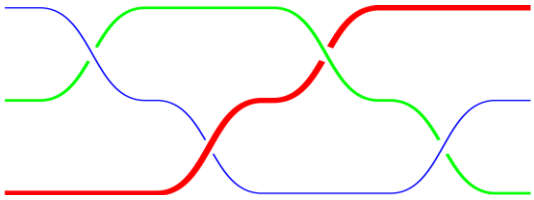
- *Les candidats **suivant** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **2**.*
- *Les candidats **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **3**.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

Exercice académique n°1
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par tous les candidats

Tresses mathématiques

Une tresse, en mathématiques, c'est une suite de croisements entre plusieurs brins.

Une tresse de la vie courante	
Tresse à 1 brin	
Tresse à 2 brins	
Tresse à 3 brins	

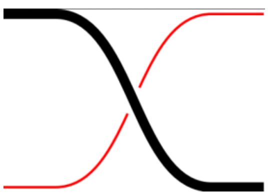
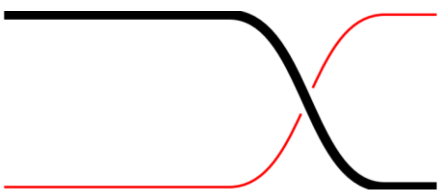
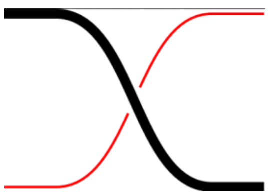
Nous allons explorer le monde des tresses mathématiques et voir que l'on peut s'en servir pour faire des calculs.

Partie A : Calculer avec des tresses

Dans cette partie, on considérera des tresses à 2 brins.
Notons 0 la tresse sans croisement et 1 la tresse où le brin du bas passe sous le brin du haut

Pour définir la somme de deux tresses, il suffit de considérer chacune d'entre elles comme une boîte avec deux brins en entrée et deux brins en sortie. Les ajouter est simplement défini comme les mettre bout à bout. On notera $\oplus$ cette opération sur les tresses.

En ajoutant les tresses 0 et 1, on obtient une tresse qui est la même que la tresse 1.
On retrouve ainsi la fameuse égalité : $0 \oplus 1 = 1$

			
0	1	$0 \oplus 1$	= 1

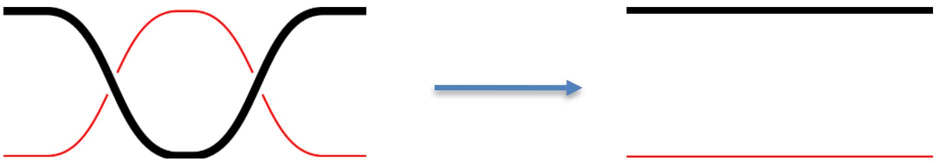
1. En procédant comme ci-dessus, effectuer le calcul $1 \oplus 1$ et dessiner la tresse correspondant au nombre 2
2. Tracer la tresse correspondant au nombre 5.
3. Expliquer comment décrire en français la tresse correspondant au nombre entier n.

L'opposé d'une tresse, noté avec un signe moins devant, est la tresse qui est son image par une symétrie d'axe vertical. Par exemple, on note -1 la tresse où le brin du bas passe sur celui du haut (c'est la tresse qui est l'image de la tresse 1 par une symétrie d'axe vertical).

-1

Effectuons, avec des tresses, l'addition $1 \oplus (-1)$
En « démêlant » les brins, comme nous pourrions le faire avec des cordes, on constate que l'on retrouve la tresse 0

On démêle une tresse en déplaçant des brins, sans les autoriser à se traverser, ni décrocher leurs extrémités.



$1 \oplus (-1)$ 0

4. Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $1 \oplus 1 \oplus (-1)$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat de l'addition à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.
5. Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $1 \oplus (-2) \oplus 3$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat de l'addition à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.
6. Effectuer, en dessinant des tresses, l'addition $4 \oplus (-5)$. Détailler le « démêlage » puis donner le résultat à l'aide de la tresse simplifiée au maximum.

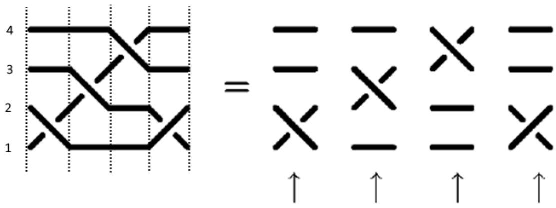
Partie B : Codage des tresses

Dans cette partie, on augmente le nombre de brins.

On numérote les brins de la tresse de bas en haut de 1 à n.
Il est possible de décomposer un diagramme de tresse en une série de diagrammes de tresses élémentaires. Dans l'exemple ci-dessous, le diagramme de gauche est décomposé en une série de 4 diagrammes élémentaires à droite.

Ensuite, utilisons un codage pour représenter les tresses.
On note s_1 la tresse élémentaire où les brins 1 et 2 se croisent, le brin 1 passant sous le brin 2
On note $\overline{s_1}$ la tresse élémentaire où les brins 1 et 2 se croisent, le brin 2 passant sous le brin 1

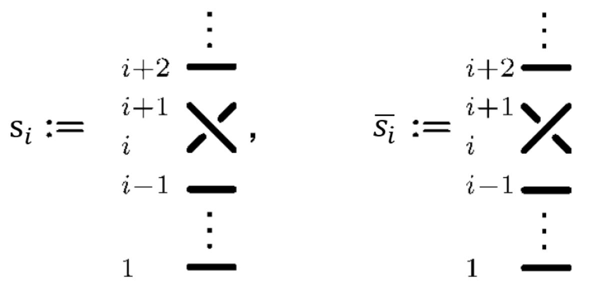
De la même manière s_2 sera la tresse élémentaire où les brins 2 et 3 se croisent, le brin 2 passant sous le brin 3.



s_1 s_2 s_3 $\overline{s_1}$

Ainsi la tresse de gauche se note : $s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus \overline{s_1}$, le symbole $\oplus$ signifiant que l'on met bout à bout les tresses élémentaires.

Plus généralement :

On note s_i la tresse élémentaire où les brins i et $i+1$ se croisent, le brin i passant sous le brin $i+1$ On note $\overline{s_i}$ la tresse élémentaire où les brins i et $i+1$ se croisent, le brin i passant au-dessus du brin $i+1$	

1. Montrer que la tresse de la figure 1, ci-dessous, se code sous la forme $\overline{s_1} \oplus \overline{s_3} \oplus s_1 \oplus s_2$
2. Quel est le codage de la tresse de la figure 2 ?
3. Dessiner la tresse à 4 brins codée par $s_3 \oplus s_2 \oplus \overline{s_2} \oplus \overline{s_1}$

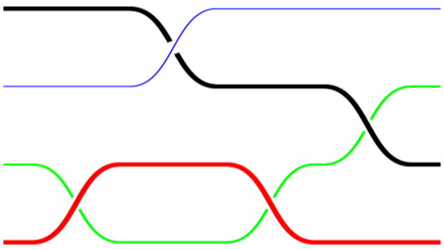


Figure 1

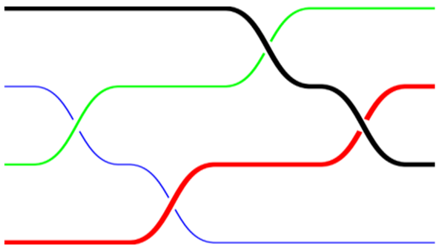
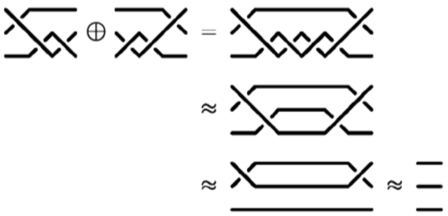


Figure 2

Partie C : Démêlage

On déclare que deux diagrammes sont équivalents lorsqu'on obtient l'un à partir de l'autre en déplaçant des brins, sans les autoriser à se traverser, ni décrocher leurs extrémités.



Dans l'exemple ci-dessus, les 3 derniers diagrammes sont équivalents.

1. Prouver que $s_1 \oplus s_2$ et $s_2 \oplus s_1$ ne sont pas équivalents, on pourra illustrer par un schéma.
2. Donner une tresse équivalente à $s_1 \oplus \overline{s_1}$.
3. De même, trouver une tresse équivalente à $\overline{s_1} \oplus s_1$.
4. En déduire, par une série de calculs, une tresse plus simple équivalente à $\overline{s_1} \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus \overline{s_3}$.

On admet les résultats suivants (Théorème d'Artin)	
Règle 1 : $s_i \oplus \overline{s_i} = \overline{s_i} \oplus s_i = 0$	pour tout entier i
Règle 2 : $s_i \oplus s_j = s_j \oplus s_i$	pour tous les entiers i et j d'écart strictement supérieur à 1
Règle 3 : $s_i \oplus s_j \oplus s_i = s_j \oplus s_i \oplus s_j$	pour tous les entiers i et j dont l'écart vaut 1

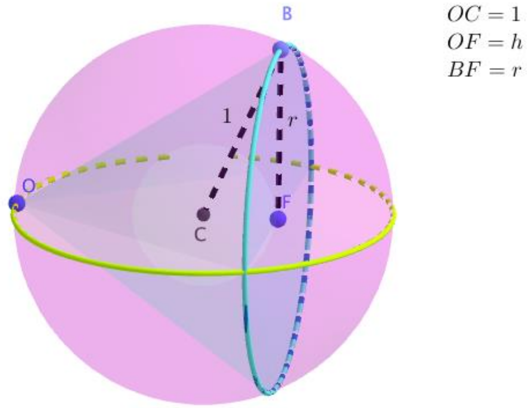
5. Justifier chaque passage d'une tresse équivalente à l'autre en donnant la ou les règle(s) utilisées à chaque étape.
$s_1 \oplus s_2 \oplus \overline{s_1} = \overline{s_2} \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus \overline{s_1} = \overline{s_2} \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s_1} = \overline{s_2} \oplus s_1 \oplus s_2$
6. En utilisant un raisonnement similaire, prouver que : $\overline{s_1} \oplus s_2 \oplus s_1 = s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s_2}$.
7. Prouver que $s_1 \oplus s_3 \oplus \overline{s_1} = s_3$, illustrer avec un diagramme de tresses à 4 brins.
8. Prouver que $s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 = s_3 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_2$.

Exercice académique n°2
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **ayant suivi** la **spécialité** de mathématiques de la voie générale

Cône inscrit dans une sphère

Partie A.

Soit C un point de l'espace. On considère la sphère de centre C et de rayon 1 ainsi que O, un point de cette sphère.
On considère dans cette partie l'ensemble E des cônes de sommet O et d'axe (OC) inscrits dans la sphère et l'on cherche le ou les cônes de cet ensemble de volume maximal. Dans l'illustration ci-dessous, le point F est le centre du disque de la base du cône et le point B est un point du cercle de la base du cône (et donc un point de la sphère).



On pourra utiliser le résultat suivant :
Le volume V d'un cône de hauteur h et de base un disque d'aire A est : $V = \frac{1}{3}Ah$.

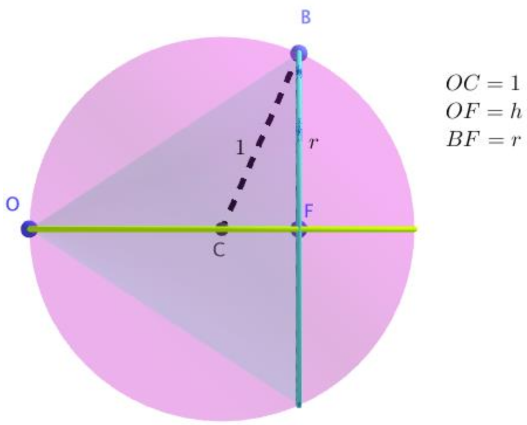
1. Camille et Dominique pensent chacun avoir trouvé la réponse : Camille pense que le volume maximal est atteint lorsque $h = 1$ et Dominique pense que c'est lorsque $h = \frac{3}{2}$.

1 a. Calculer le volume du cône dans ces deux cas particuliers.
1 b. Qui de Camille ou Dominique a nécessairement tort ?

2. Soit Γ un cône de l'ensemble E. On note respectivement par h et r la hauteur et le rayon du disque de la base de Γ.

2 a. Préciser l'intervalle I auquel h appartient.
2 b. Exprimer r en fonction de h.

On pourra utiliser le schéma ci-dessous qui montre une vue de profil du solide et distinguer le cas où h est un élément de I inférieur ou égal à 1 et où h est un élément de I vérifiant $h > 1$.



2 c. Démontrer que le volume du cône Γ est :

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2 - h).$$

3. Dans cette question on s'intéresse aux cônes de volume maximal.

3 a. Démontrer que, pour tout réel h de l'intervalle I, la différence $\frac{32}{81}\pi - V(h)$ admet pour forme factorisée :

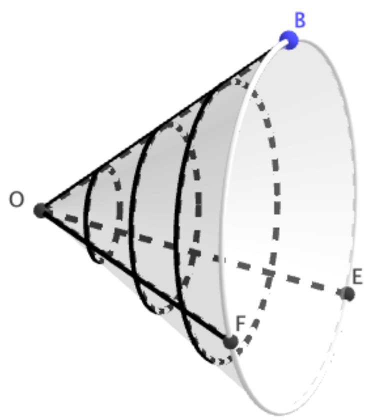
$$\frac{\pi}{81}(3h + 2)(3h - 4)^2.$$

3 b. Étudier le signe de la différence $\frac{32}{81}\pi - V(h)$ et en déduire que le volume V est maximal pour $h = \frac{4}{3}$.

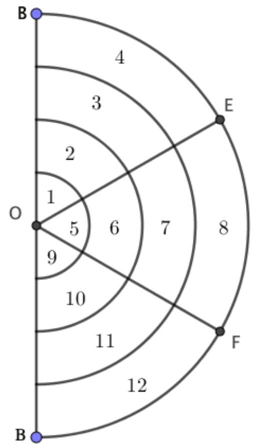
3 c. En déduire qu'il existe un unique cône de volume maximal parmi les éléments de E puis calculer le rayon et le volume de ce cône.

Partie B.

Dans cette partie, on va étudier un coloriage partiel et aléatoire d'un cône de hauteur 4.
On considère le cône partagé en 12 surfaces selon l'illustration ci-dessous. On considère d'une part trois points B, E et F positionnés de façon régulière à la base du cône et d'autre part trois cercles sur le cône, parallèles au cercle du disque de base et régulièrement répartis entre le sommet O et la base.
Sur le patron, les segments $[OB]$, $[OE]$ et $[OF]$ délimitent trois secteurs superposables. Chacun de ces secteurs étant partagé en quatre, on obtient 12 cases numérotées de 1 à 12 sur la figure :



Vue en perspective du cône



Patron du cône

Un artiste choisit de peindre seulement quatre cases du patron et la désignation des cases coloriées s'effectue grâce à l'exécution d'un programme, nommé MONDRIAN, qui renvoie quatre nombres aléatoires correspondant au numéro des cases à colorier.
Les couleurs associées aux secteurs respectent les consignes suivantes :

- si le quotient par 4 du numéro de la case vaut 0, alors la case est coloriée en jaune ;
- si le quotient par 4 du numéro de la case vaut 1, alors la case est coloriée en rouge ;
- sinon, la case est coloriée en bleu.

1. Expliquer chacune des lignes du script suivant en lien avec la situation décrite ci-dessus :

main.py MONDRIAN.py

```python
from math import*
from random import*

for i in range (1,5):
    Q=randint(0,2)
    D=4*Q+i
    print(D)

```

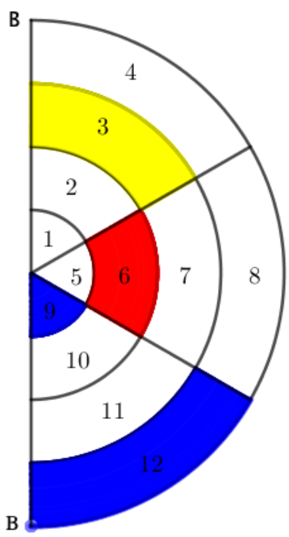
2. Après exécution du programme, l'affichage est le suivant :

Run Share $

```
5
2
11
4
```

Colorier le patron joint en ANNEXE (page 10) comme l'aurait fait l'artiste suivant ces instructions.

3. Une seconde exécution du programme a conduit au coloriage suivant dans lequel la case 3 est jaune, la case 6 est rouge et les cases 9 et 12 sont bleues.



On observe que la surface des cases coloriées représente un tiers de la surface du patron.
Est-il possible de choisir un coloriage de quatre cases de sorte que la proportion coloriée soit égale à 0,5 ?

3.a. Si oui, proposer une liste de quatre cases à colorier de sorte à satisfaire cette contrainte.

3.b. Existe-t-il d'autres listes envisageables ? Si oui, les dénombrer.

Exercice académique 3
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **n'ayant pas** suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale.

Somme de dés

Partie A : Sommes de deux dés
On lance deux fois un dé puis on fait la somme des valeurs obtenues.

1. Dans cette question, le dé est cubique, équilibré et les faces sont numérotées de 1 à 6.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant les sommes possibles.

Lancer 1 / Lancer 2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Pour tout entier n entre 2 et 12 on note S_n l'événement « la somme des valeurs vaut n » et $P(S_n)$ la probabilité de l'événement S_n.

   b. Justifier que $P(S_3) = \frac{1}{18}$.
   c. Déterminer la valeur de $P(S_6)$.
   d. Recopier et compléter le tableau de probabilités suivant en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_n)$		$\frac{1}{18}$									

   e. Quelle est la somme la plus probable.
2. Dans cette question, le dé a 4 faces numérotées de 1 à 4. Justifier que la somme la plus probable pour deux lancers est 5.
3. Dans cette question, on imagine un dé a 2025 faces numérotées de 1 à 2025. Quelle est la somme la plus probable pour deux lancers ?

Partie B : Somme de deux dés truqués

On cherche à truquer un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 pour que, lorsqu'on le lance deux fois, chacune des sommes de 2 à 12 ait la même probabilité d'être obtenue.

Supposons qu'un tel dé existe. Pour tout entier i de 1 à 6, on note p_i la probabilité d'obtenir une face dont la valeur est i en un lancer. Par exemple p_1 est la probabilité d'obtenir un 1 en un lancer.
Pour tout entier n entre 2 et 12 on note encore S_n l'événement : « la somme des valeurs vaut n ».

1. Justifier que $P(S_2) = {p_1}^2$ et en déduire que $p_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}$.
2. En calculant d'autres valeurs de p_i, déterminer si un tel dé existe.

Partie C : Somme de trois dés

Au XVII^e siècle, le Grand-Duc de Toscane était un grand amateur de jeux de dés. À force de jouer, il lui semblait avoir remarqué qu'en lançant trois dés et en additionnant les résultats, il obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Ce résultat ne lui semblait pas normal, car il se disait qu'on pouvait obtenir une somme de 9 de six façons différentes :
$1+2+6$; $1+3+5$; $1+4+4$; $2+2+5$; $2+3+4$ et $3+3+3$.
Mais on peut aussi obtenir 10 de six façons :
$1+3+6$; $1+4+5$; $2+2+6$; $2+3+5$; $2+4+4$ et $3+3+4$.
Ce problème fut, à l'époque, source de nombreuses discussions.

On lance trois fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait la somme des valeurs obtenus.
Pour tout entier n on note encore S_n l'événement « la somme des trois valeurs vaut n. »

1. Quels sont les valeurs possibles pour la somme des points après trois lancers du dé ?
2. Combien y a -t-il de façons d'obtenir une somme de 3 ? de 4 ? En déduire $P(S_3)$ et $P(S_4)$.
3. On suppose ici que la somme après trois lancers est 6. Quelles sont les résultats possibles pour la somme des deux premiers lancers ? En déduire $P(S_6)$.
4. Donner la probabilité de chaque somme possible après trois lancers. On pourra donner la réponse sous forme de tableau comme au **A.1.d.**
5. Quelle est la somme la plus probable ?
6. Répondre à la problématique du Grand-Duc de Toscane.

ANNEXE À RENDRE (exercice 2)