ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2025

Épreuve académique

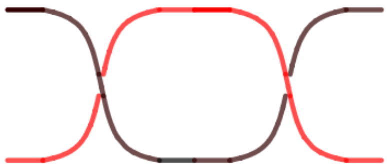
Corrigés des trois exercices académiques

Exercice n° 1 - Tresses mathématiques

À traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par **tous les candidats**.

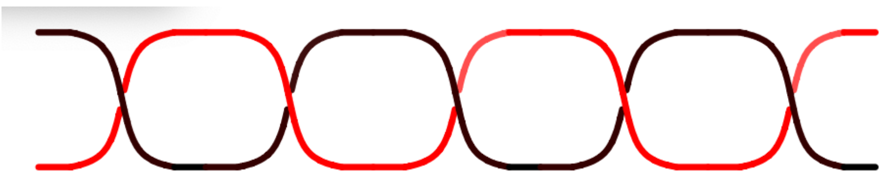
Partie A : Calculer avec des tresses

1. Le calcul $1 \oplus 1$ a pour résultat 2.



$1 \oplus 1 = 2$

2. La tresse correspondant au nombre 5 résulte de la mise bout à bout de 5 fois la tresse 1 :



$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 5$

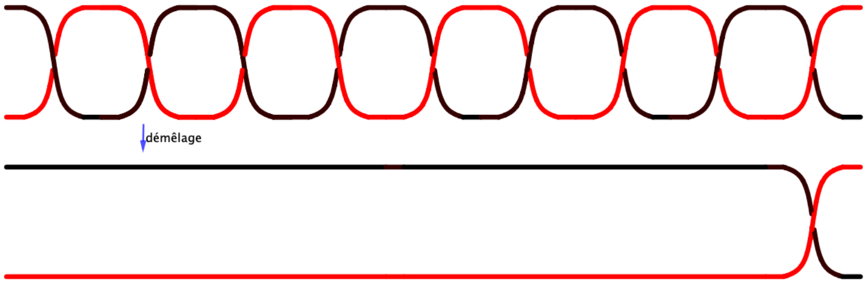
3. La tresse correspondant au nombre n résulte de la mise bout à bout de n fois la tresse 1.
4. La tresse $1 \oplus 1 \oplus (-1)$ est dessinée ci-dessous :

$1 \oplus 1 \oplus (-1) = 1$

Le démêlage fait apparaître la tresse associée à $1 \oplus 0$, laquelle équivaut à la tresse 1.

5. La tresse $1 \oplus (-2) \oplus 3$ peut se décomposer en $1 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$ et comme on a vu que $1 \oplus (-1) = 0$, par associativité et commutativité naturelles pour ces opérations , on obtient : $1 \oplus (-2) \oplus 3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 2$

6. La tresse $4 \oplus (-5)$ est dessinée ci-dessous :



$4 \oplus (-5) = (-1)$

La tresse $4 \oplus (-5)$ se décompose en $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1)$ et le démêlage par l'intérieur donne successivement :

$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1)$

$1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus (-1) \oplus (-1) \oplus (-1)$

$1 \oplus 0 \oplus (-1) \oplus (-1)$

$0 \oplus (-1) = (-1)$

La tresse $4 \oplus (-5)$ est égale à la tresse (-1).

Partie B : Codage des tresses

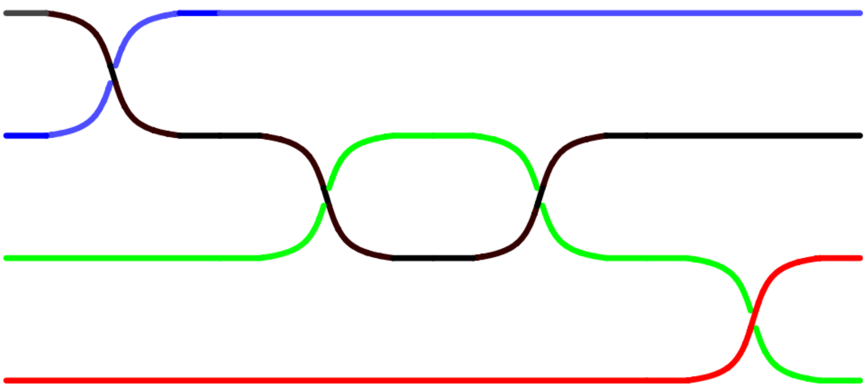
1. La figure 1 est constituée de la mise bout à bout des tresses suivantes :
- le brin 2 passe sous le brin 1 ;
- le brin 4 passe sous le brin 3 ;
- le brin 1 passe sous le brin 2 ;
- le brin 2 passe sous le brin 3.

Ce qui correspond à l'addition des tresses $\overline{s_1} \oplus \overline{s_3} \oplus s_2 \oplus s_2$.

2. La figure 2 est constituée de la mise bout à bout des tresses suivantes :
- le brin 3 passe sous le brin 2 ;
- le brin 2 passe sous le brin 1 ;
- le brin 3 passe sous le brin 4 ;
- le brin 2 passe sous le brin 3.

Ce qui correspond à l'addition des tresses $\overline{s_2} \oplus \overline{s_1} \oplus s_3 \oplus s_2$.

3. La tresse $s_3 \oplus_2 \oplus \overline{s_2} \oplus \overline{s_1}$ est dessinée ci-dessous :



$s_3 \oplus s_2 \oplus \overline{s_2} \oplus \overline{s_1}$

Partie C : Démêlage

1. Avec pour situation initiale où le brin 1 est le brin rouge, le brin 2 est vert, le brin 3 est bleu et le brin 4 est noir, l'opération $s_1 \oplus s_2$ fait passer le brin 1 (rouge) sous le brin 2 (vert) puis le brin 2 (à présent rouge) sous le brin 3 (bleu). L'ordre final est de bas en haut : vert, bleu, rouge et noir.

Avec la même situation initiale, l'opération $s_2 \oplus s_1$ fait passer le brin 2 (vert) sous le brin 2 (bleu) puis le brin 1 (rouge) sous le brin 2 (à présen bleu). L'ordre final est de bas en haut : bleu, rouge, vert et noir.

Les deux opérations ne sont donc pas équivalentes.

2. Une tresse équivalente à $s_1 \oplus \overline{s}_1$ est la tresse nulle.

3. Une tresse équivalente à $\overline{s}_1 \oplus s_1$ est la tresse nulle.

4. Le calcul $\overline{s}_1 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus \overline{s}_3$ équivaut à la tresse $0 \oplus s_2 \oplus 0 = s_2$.

5. D'après la règle 1, $\overline{s}_2 \oplus s_2 = 0$, donc :

$s_1 \oplus s_2 \oplus \overline{s}_1 = \overline{s}_2 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus \overline{s}_1$ on applique la règle 3 aux 2 additions centrales, l'écart entre 1 et 2 valant 1

$= \overline{s}_2 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s}_1$ on applique la règle 1 à la dernière addition

$= \overline{s}_2 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus 0$ que l'on simplifie

$= \overline{s}_2 \oplus s_1 \oplus s_2$

6. On a :

$\overline{s}_1 \oplus s_2 \oplus s_1 = \overline{s}_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus 0$ et d'après la règle 1, $s_2 \oplus \overline{s}_2 = 0$

$= \overline{s}_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus \overline{s}_2$ on applique la règle 3 aux 2 additions centrales, l'écart entre 1 et 2 valant 1

$= \overline{s}_1 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s}_2$ on applique la règle 1 à la première addition

$= 0 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s}_2$ que l'on simplifie

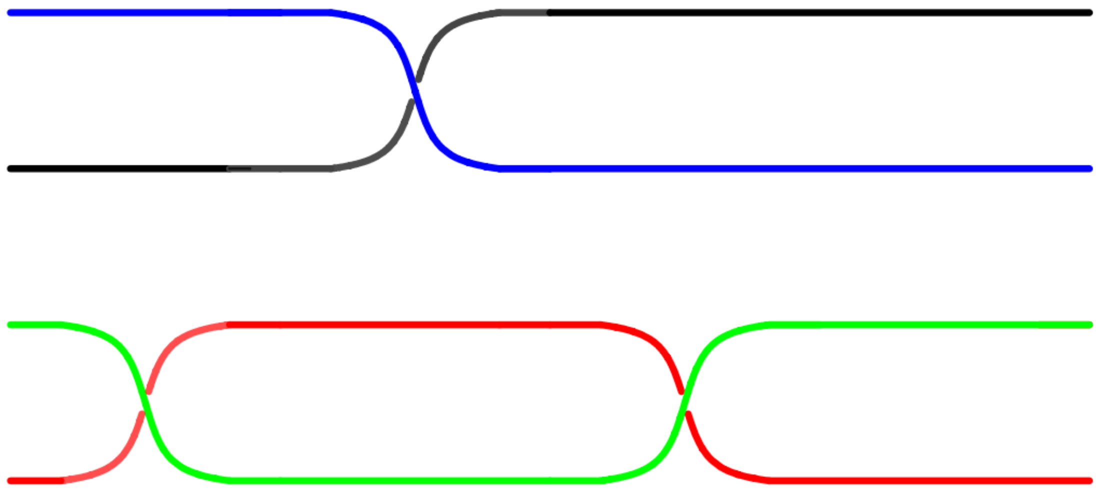
$= s_2 \oplus s_1 \oplus \overline{s}_2$

7. On peut appliquer la règle 2 à $s_1 \oplus s_3$ puisque l'écart entre 1 et 3 est strictement supérieur à 1. Il vient

$$s_1 \oplus s_3 \oplus \overline{s}_1 = s_3 \oplus s_1 \oplus \overline{s}_1$$

qui se simplifie grâce à la règle 1 en $s_3 \oplus 0$ soit s_3.

Illustration :



$s_1 \oplus s_3 \oplus \overline{s}_1 = s_3$

Les deux brins 1 et 2 du bas se démêlent et l'addition de la somme est égale à la somme nulle.

8. On a :

$s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_2$ règle 3 pour $(i, j) = (1,2)$

$= s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_2$ règle 3 pour $(i, j) = (2,3)$

$= s_3 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_3 \oplus s_2$ règle 2 pour $\{i, j\} = \{1,3\}$

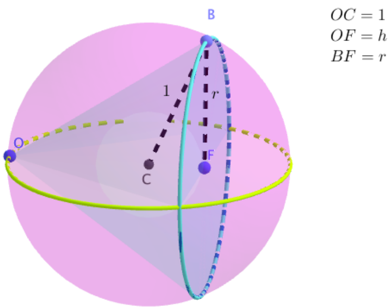
$= s_3 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_1 \oplus s_2$ règle 2 pour $\{i, j\} = \{1,3\}$

Exercice n° 2 - Cône inscrit dans une sphère

À traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **ayant suivi la spécialité de mathématiques** de la voie générale.
Les parties peuvent se traiter de façon indépendante.
Soient R un réel strictement positif fixé, C un point de l'espace, Σ la sphère de centre C et de rayon R et O un point de la sphère.

Partie A.

On considère dans cette partie l'ensemble $\mathscr{E}$ des cônes de sommet O.



1. Camille et Dominique pensent chacun avoir trouvé la réponse. Camille pense que le volume maximal est atteint lorsque $h = 1$ et Dominique pense que c'est lorsque $h = \frac{3}{2}$.
   a. **Calcul du volume du cône dans le cas où** $h = 1$: Si $h = 1$, alors $r = 1$ et le volume V_A du cône calculé par Camille est
   $$V_A = \frac{1}{3}\pi.$$
   Calcul du volume du cône dans le cas où $h = \frac{3}{2}$: Si $h = \frac{3}{2}$, alors $CF = \frac{1}{2}$ et $r = BF$. Le triangle BCF est rectangle en F et le théorème de Pythagore permet d'écrire que $BF^2 = BC^2 - CF^2$ d'où $r^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et le volume V_B du cône calculé par Dominque est $V_B = \frac{1}{3}\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ soit
   $$V_B = \frac{3}{8}\pi.$$
   b. Comparaison des volumes calculés : comme $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$, que $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ et que $\frac{8}{24} < \frac{9}{24}$, on peut affirmer que $V_A < V_B$. Conclusion : **Camille a forcément tort**.
2. Soient Γ un cône de l'ensemble $\mathscr{E}$. On note respectivement par h et r la hauteur et le rayon du disque de la base de Γ.
   a. Comme le point F, centre du disque de la base du cône peut décrire le diamètre issu de O de la boule privé de ses extrémités (sans quoi le disque de base est réduit à un point), $r \in]0, 2[$.
   b. **Expression de** r **en fonction de** h **:**
   Le triangle BCF est rectangle en F, $BF = r$, $BC = 1$ et $CF = |h - 1|$. Le théorème de Pythagore permet d'écrire que $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2}$ d'où $r = \sqrt{1^2 - (h-1)^2}$ soit $r = \sqrt{2h - h^2}$.
   Remarque : il n'y a en fait pas lieu de distinguer le cas où h est un élément de I inférieur ou égal à 1 et où h est un élément de I vérifiant $h > 1$ dans la mesure où seul le carré de la différence de h et 1 intervient .
   c. Calcul du volume du cône Γ en fonction de h.
   En exploitant le fait que le rayon r du disque de base a pour expression celle trouvée à la question précédente, on peut écrire que
   $$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi \times (2h - h^2) \times h \\ &= \frac{1}{3}\pi \times (2 - h) \times h^2 \end{aligned}$$

3. a. Étude de la différence de $\frac{32}{81}\pi - V(h)$: Soit $h \in]0,2[$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{32}{81}\pi - V(h) &= \frac{32}{81}\pi - \frac{1}{3}\pi \times (2-h) \times h^2\\ &= \frac{32}{81}\pi - \frac{1\times 27}{3\times 27}\pi \times (2-h)\times h^2\\ &= \frac{\pi}{81}\left(32 - 27\times(2-h)\times h^2\right)\\ &= \frac{\pi}{81}\left(32 - 54h^2 + 27h^3\right)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{81}(3h+2)(3h-4)^2 &= \frac{\pi}{81}(3h+2)(9h^2-24h+16)\\ &= \frac{\pi}{81}(27h^3 - 72h^2 + 48h + 18h^2 - 48h + 32)\\ &= \frac{\pi}{81}(27h^3 - 54h^2 + 32)\end{aligned}$$

Par transitivité de l'égalité, on peut écrire que $\frac{32}{81}\pi - V(h) = \frac{\pi}{81}(3h+2)(3h-4)^2$.

Comme de plus, le réel h a été fixé de façon arbitraire dans l'intervalle $]0,2[$, on peut conclure que cette égalité est vérifiée pour tout réel h de l'intervalle considéré.

b. Étude du signe de $\frac{32}{81}\pi - V(h)$:

L'étude de cette différence s'effectue à partir de la forme factorisée obtenue à la question 3.*a.* :

Puisque $h \geq 0$, $3h+2 > 0$ et tous les facteurs en présence sont positifs et ce produit vaut 0 pour $3h-4=0$, c'est-à dire $h = \frac{4}{3} \in]0,2[$.

Ainsi pour tout réel $h \in]0,2[$, $\frac{32}{81}\pi - V(h)$ est une expression de signe positif qui s'annule en une unique valeur de h, à savoir pour $h = \frac{4}{3}$.

c. Calcul du rayon de la base et du volume du cône de volume maximal parmi les éléments de $\mathscr{E}$.

En remplaçant dans l'égalité $r = \sqrt{2hR - h^2}$, le réel h par $\frac{4}{3}$, on obtient que le rayon r du cône de volume maximal parmi les éléments de $\mathscr{E}$ est

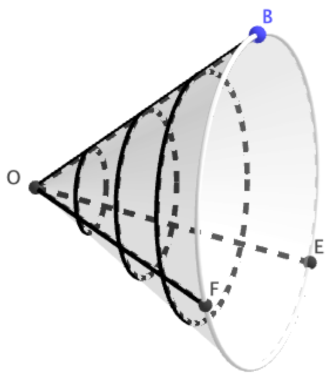
$$r = \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

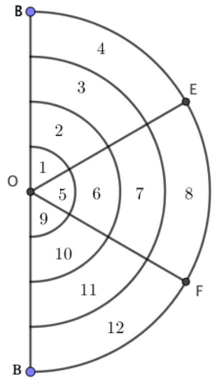
Le volume $V(h)$ du cône de volume maximal parmi les éléments de $\mathscr{E}$ est $V\left(\frac{4}{3}\right)$ dont la valeur vaut d'après la question précédente $\frac{32}{81}\pi$.

Partie B

Dans cette partie, on va étudier un coloriage partiel et aléatoire d'un cône de hauteur 4.

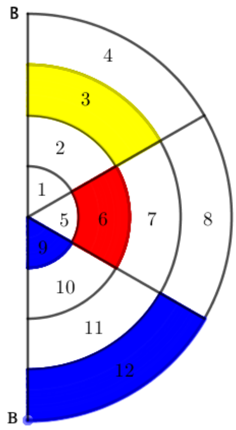
On considère le cône partagé en 12 surfaces selon l'illustration ci-dessous obtenu en considérant d'une part trois points B, E et F positionnés de façon régulière à la base du cône et d'autre part trois cercles sur le cône parallèles au cercle du disque de base et régulièrement répartis entre le sommet et la base. Les segments $[OB]$, $[OE]$ et $[OF]$ délimitent trois «triangles» incurvés superposables. Chacun de ces «triangles» étant partagé en quatre, on obtient 12 secteurs numérotés conformément au patron ci-dessous :





Un artiste choisit de peindre seulement quatre cases du patron et la désignation des cases coloriées s'effectue grâce à l'exécution d'un programme, nommé MONDRIAN, qui renvoie quatre nombres aléatoires correspondant au numéro des secteurs à colorier.
Les couleurs associées aux secteurs respectent les consignes suivantes :
si le quotient par 4 du numéro du secteur vaut 0, alors la case est coloriée en jaune ;
si le quotient par 4 du numéro du secteur vaut 1, alors la case est coloriée en rouge
sinon la case est coloriée en bleu.

1. Expliquer chacune des lignes du script suivant : «From math import» et «From random import» sont des bibliothèques permettant d'usage de fonctions mathématiques et de l'outil de génération d'un nombre (pseudo) aléatoire ;
   «For i in range (1,5)» est la création d'un compteur qui prend des valeurs entières comprises entre 1 et 4 ;
   «Q=randint(0,2)» est l'attribution à une variable Q d'un entier aléatoire pris dans l'ensemble $\{0, 2\}$;
   «D=4*Q+i» est l'attribution à une variable D du résultat du calcul $4\mathrm{Q} + \mathrm{i}$;
   «print (D)» est l'instruction d'affichage du résultat de la variable D.
2. Les quotients des nombres affichés par 4 sont 1 - 0 - 2 - 1 donc la case 5 est rouge ; la case 2 est jaune ; la case 11 est bleue et la case 4 est jaune.
3. Une seconde exécution du programme a conduit au coloriage suivant :



On cherche les cases à colorier de sorte à ce que la surface coloriée représente la moitié de la surface du patron. Il est possible de trouver une première solution sans calcul :
La surface recouverte par l'union des secteurs 1, 2, 5,6, 9 et 10 vaut le quart de celle du patron puisque cette union recouvre un demi-disque de rayon $\dfrac{1}{2}$.
Chacune des surfaces constituées de l'union des secteurs désignés par leur numéro respectif $\{3 \cup 4\}$, $\{7 \cup 8\}$ et $\{11 \cup 12\}$ sont superposables donc représentent chacune $\dfrac{1}{3}$ de la surface restant, soit $\dfrac{1}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$ de la surface totale du patron.

Exercice n° 2 - Cône inscrit dans une sphère

Comme seuls quatre secteurs doivent être coloriés, en coloriant les secteurs portant des numéros choisis dans deux des unions parmi $\{3 \cup 4\}$, $\{7 \cup 8\}$ et $\{11 \cup 12\}$ (donc 3 choix possibles), on obtient une surface qui représente la moitié de la surface du patron.

Il est néanmoins intéressant de se demander s'il existe un autre choix de secteurs à colorier. Raisonnons par le calcul.

• L'aire de chacun des secteurs 1, 5 et 9 vaut $\dfrac{\pi}{6} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{\pi}{96}$ unités d'aire soit une proportion par rapport à l'aire du patron de $\dfrac{1}{48}$.

• L'aire de chacun des secteurs 2, 6 et 10 vaut $\dfrac{\pi}{6} \times \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right] = \dfrac{\pi}{32}$ unités d'aire soit une proportion par rapport à l'aire du patron de $\dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{48}$.

• L'aire de chacun des secteurs 3, 7 et 11 vaut $\dfrac{\pi}{6} \times \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right] = \dfrac{5\pi}{96}$ unités d'aire soit une proportion par rapport à l'aire du patron de $\dfrac{5}{48}$.

L'aire de chacun des secteurs 4, 8 et 12 vaut $\dfrac{\pi}{6} \times \left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right] = \dfrac{7\pi}{96}$ unités d'aire soit une proportion par rapport à l'aire du patron de $\dfrac{7}{48}$.

Le problème revient donc à obtenir 24 comme somme d'exactement quatre nombres entiers à choir dans l'ensemble $\{1, 3, 5, 7\}$.

On a $24 = 7 + 7 + 7 + 3 = 7 + 7 + 5 + 5$ et il ne peut exister d'autres sommes possibles puisqu'il ne peut pas exister de somme valant 24 avec quatre termes valant 7 ni avec un seul terme valant 7 ou moins car on ne peut pas obtenir une somme supérieure ou égale à 17 avec trois termes de $\{1, 3, 5\}$.

Outre le choix trouvé de façon géométrique, on peut choisir de colorier le secteurs 4, 8 et 12 ainsi que l'un des secteurs numérotés 2, 6 ou 10.

Exercice n° 3 - Somme de dés

À traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **n'ayant pas** suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale.

Partie A :

1. Dans cette partie le dé est cubique et équilibré.

a. Le tableau des issues est :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pour tout entier n entre 2 et 12 on note S_n l'événement « la somme des valeurs vaut n » et $P(S_n)$ la probabilité de l'événement S_n.

b. Il y a deux façons pour que la somme soit égale à 3 : $(1;2)$ et $(2;1)$ sur 36 possibilités donc $P(S_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

c. Il y a cinq façons pour que la somme soit égale à 6 : $(1;5)$; $(2;4)$; $(3;3)$; $(4;2)$ et $(5;1)$ donc $P(S_6) = \frac{5}{36}$.

d. Le tableau ci-dessous donne la loi suivie par la variable aléatoire donnant la somme de deux dés équilibrés :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{36}$

e. Il apparaît au vu du tableau que la somme la plus probable est 7.

2. Dans cette question, le dé est équilibré et possède quatre faces. Le tableau listant les issues de la variable aléatoire associée à la somme de deux lancers est :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

La somme la plus probable est 5 avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

3. Si $2 \leq n \leq 2025$, il y aura $n-1$ façons pour que la somme soit n : $(1;n-1)$ et $(2;n-2);\ldots;(n-1;1)$ donc moins de 2025 façons possibles. Si $2027 \leq n \leq 4050$, il y aura $4051-n$ façons pour que la somme soit n : $(2025;n-2025)$, $(2024;n-2024)$ et $(n-2025;2025)$ donc moins de 2025 façons possibles.

La somme la plus probable sera 2026 car il y aura 2025 façons pour que la somme soit 2026 et $P_{2026} = \frac{1}{2025}$.

Partie B : Somme de deux dés truqués

1. La seule façon d'obtenir une somme valant 2 est d'obtenir $(1;1)$ donc la probabilité associée est p_1^2 donc

$$P(S_2) = p_1^2$$

or il y a 11 sommes possibles de 2 à 12 et par équiprobabilité, il vient

$$P(S_2) = \frac{1}{11},$$

d'où $p_1^2 = \dfrac{1}{11}$, donc

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

2. Il existe deux façons d'obtenir une somme valant 3 : $(1;2)$ et $(2;1)$. Ainsi,

$$P(S_3) = p_1 p_2 + p_2 p_1 = 2p_1 p_2.$$

Or,

$$P(S_3) = \frac{1}{11}.$$

Il vient

$$p_2 = \frac{P(S_3)}{2p_1} = \frac{\frac{1}{11}}{2\frac{1}{\sqrt{11}}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}.$$

Il existe trois façons d'obtenir une somme valant 4 : $(1;3)$, $(2;2)$ et $(3;1)$. Ainsi,

$$P(S_4) = p_1 p_3 + p_2^2 + p_3 p_1 = 2p_1 p_3 + p_2^2.$$

Or, $P(S_4) = \dfrac{1}{11}$. Il vient $p_2 = \dfrac{P(S_4) - p_2^2}{2p_1} = \dfrac{\frac{1}{11} - \frac{1}{4\times 11}}{2\frac{1}{\sqrt{11}}} = \dfrac{3}{8\sqrt{11}}$.

De manière analogue en utilisant S_{12}, S_{11} et S_{10} on trouve $p_6 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$, $p_5 = \dfrac{1}{2\sqrt{11}}$ et $p_4 = \dfrac{3}{8\sqrt{11}}$. La somme $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \dfrac{15}{4\sqrt{11}} \neq 1$ donc il n'est pas possible d'avoir un tel dé.

OU Supposons qu'un tel dé existe.

On a d'une part que

$$P(S_7) = p_1 p_6 + p_2 p_5 + p_3 p_4 + p_4 p_3 + p_5 p_2 + p_6 p_1.$$

D'autre part, $p_1 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$ et $p_6 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$ (calculé grâce au fait que $P(S_{12}) = p_6^2 = \dfrac{1}{11}$), donc $p_1 p_6 + p_6 p_1 = \dfrac{2}{11}$ et on en déduit que $P(S_7) > \dfrac{2}{11}$. Or,

$$P(S_7) = \frac{1}{11}.$$

Il y a donc contradiction et la supposition émise est absurde : un tel dé n'existe pas.

Partie C : trois dés

1. On peut obtenir toutes les sommes entre 3 et 18 donc n doit être entre 3 et 18.

2. Il y a une seule façon d'obtenir une somme valant 3 : les trois dés doivent donner 1 or il y a $6 \times 6 \times 6 = 216$ possibilités, donc $P(S_3) = \dfrac{1}{216}$.

Il y a trois façons d'obtenir une somme égale à 4 : $(1,1,2)$; $(1,2,1)$ et $(2,1,1)$ donc $P(S_4) = \dfrac{3}{216} = \dfrac{1}{72}$.

3. Pour obtenir un six, il faut que :

— les deux premiers lancers aient permis d'obtenir une somme valant 5 puis que le dernier lancer donne 1 ;
— les deux premiers lancers aient permis d'obtenir une somme valant 4 puis que le dernier lancer donne 2 ;
— les deux premiers lancers aient permis d'obtenir une somme valant 3 puis que le dernier lancer donne 3 ;
— les deux premiers lancers aient permis d'obtenir une somme valant 2 puis que le dernier lancer donne 4.

Or il y a **quatre** façons d'obtenir une somme valant 5 en lançant deux fois un dé, **trois** façons d'obtenir une somme valant 4, **deux** façons d'obtenir une somme valant 3 et **une** façon d'obtenir une somme valant 2. Il existe donc dix façons d'avoir une somme valant 6 avec trois dés. Ainsi, $P(S_6) = \dfrac{10}{216} = \dfrac{5}{108}$.

4. La loi de probabilité de la variable aléatoire donnant la somme de trois dés cubiques est la suivante :

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S_n)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$	$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$	$\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$	$\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$	$\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$

n	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_n)$	$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$	$\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$	$\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$	$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$	$\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$	$\frac{1}{216}$

5. Les sommes les plus probables sont celles valant 10 et 11.

6. La probabilité d'obtenir une somme égale à 9 est inférieure à la probabilité d'obtenir une somme égale à 10. Le paradoxe du Duc de Toscane vient de l'ordre d'apparition des valeurs et le fait qu'un même terme apparaisse plusieurs fois. Ainsi, $1+2+6$ peut être obtenue de six manières différentes selon l'ordre d'apparition, alors qu'il y a qu'une seule manière de faire $3+3+3$.

Il y a 25 façons d'obtenir une somme valant 9 :
$(1,2,6)$, $(1,6,2)$, $(2,1,6)$, $(2,6,1)$, $(6,1,2)$; $(6,2,1)$;
$(1,3,5)$, $(1,5,3)$, $(3,1,5)$, $(3,5,1)$, $(5,1,3)$; $(5,3,1)$;
$(1,4,4)$, $(4,1,4)$, $(4,4,1)$,
$(2,2,5)$, $(2,5,2)$; $(5,2,2)$;
$(2,3,4)$, $(2,4,3)$, $(3,2,4)$, $(3,4,2)$, $(4,2,3)$; $(4,3,2)$
et $(3,3,3)$.

Il y a 27 façons d'obtenir une somme valant 10 :
$(1,3,6)$, $(1,6,3)$, $(3,1,6)$, $(3,6,1)$, $(6,1,3)$; $(6,3,1)$;
$(1,4,5)$, $(1,5,4)$, $(4,1,5)$, $(4,5,1)$, $(5,1,4)$; $(5,4,1)$;
$(2,4,4)$, $(4,2,4)$, $(4,4,2)$,
$(2,2,6)$, $(2,6,2)$; $(6,2,2)$;
$(2,3,5)$, $(2,5,3)$, $(3,2,5)$, $(3,5,2)$, $(5,2,3)$; $(5,3,2)$
et $(3,3,4)$, $(3,4,3)$, $(4,3,3)$.