ACADÉMIE DE VERSAILLES

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 25 mars 2025

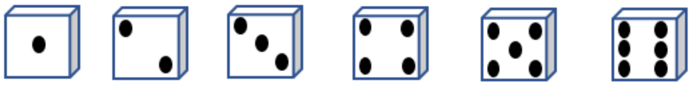
Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédiger sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1
Mur de jetons

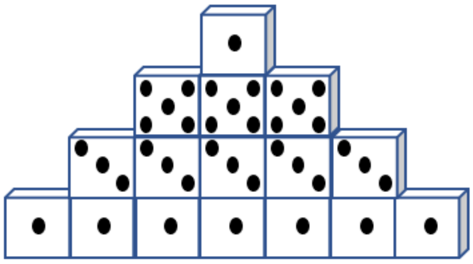
Jérémy dispose d'une boîte de jetons. Cette boîte contient six types de jetons :



La boîte comprend un nombre important de jetons de chaque type.
Jérémy s'amuse à empiler des jetons pour former des murs triangulaires en suivant les principes suivants.

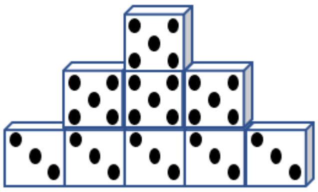
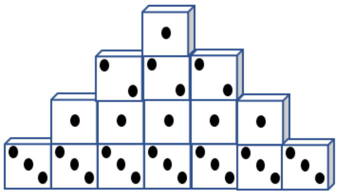
- Chaque étage contient un nombre impair de jetons, inférieur de deux à l'effectif de l'étage en dessous.
- Les jetons d'un même étage sont de même type.
- L'étage le plus haut contient un unique jeton.

Voici ci-contre un exemple de mur de jetons à quatre étages que Jérémy a construit.



On appelle *force d'un mur* la somme des points de ce mur de jetons.
Par exemple, la force du mur ci-contre est 38.

1. Parmi les deux murs de jetons construits ci-dessous, quel est celui qui a la plus grande force ?

	
Mur n°1 à trois étages	Mur n°2 à quatre étages

2. Proposer un mur de jetons à quatre étages de force 48.
3. Proposer trois murs de jetons à trois étages tels que la force de l'un d'eux soit égale à la moyenne des forces des deux autres.
4. Déterminer tous les murs de jetons à trois étages de force 20 que l'on peut construire.

Exercice 2
Un logo

Soit ABCD un rectangle tel que $\mathrm{AB} = 2$ et $\mathrm{BC} = 4$.
On note O le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$ et I le milieu du segment $[\mathrm{AD}]$.
Les droites (BD) et (AO) se coupent en un point noté E.
Les droites (AC) et (DO) se coupent en un point noté F.
Les droites (BD) et (AC) se coupent en un point noté G.
Les droites (IC) et (BD)se coupent en un point noté H.

1. Faire une figure
2. Déterminer l'aire du triangle BOG.
3. Déterminer la nature du quadrilatère AICO.
4. Démontrer que les triangles BEO et DIH sont égaux.
5. Démontrer que la hauteur issue de H dans le triangle BHC est le double de la hauteur issue du E dans le triangle BEO.
6. En déduire l'aire du quadrilatère OFGE.

Exercice 3
Décomposition

Un nombre entier positif peut être décomposé en somme de nombres entiers positifs.
On appelle *score* d'une décomposition le produit des termes de la décomposition.
Par exemple, si on écrit $7 = 2 + 1 + 4$, le score de cette décomposition est égal à $2 \times 1 \times 4 = 8$.
On peut aussi écrire $7 = 1 + 6$, le score de cette décomposition est alors égal à $1 \times 6 = 6$.

1. Trouver une décomposition de 11 dont le score est égal à :
- **a.** 28.
- **b.** 1.
- **c.** 5.
- **d.** 48.

2. Le meilleur score que l'on peut obtenir en décomposant 11 est 54. Trouver une décomposition qui permet de l'obtenir.

3. René a calculé le score d'une décomposition de 11 dans laquelle un des termes est 1. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une décomposition de 12 dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par René.

4. **a.** Anissa a calculé le score d'une décomposition d'un nombre entier positif m dans laquelle un des termes est 5. Est-il toujours possible de trouver une décomposition de m dont le score est strictement supérieur à celui obtenu par Anissa ?

b. De façon générale, expliquer pourquoi, lorsqu'un des termes d'une décomposition d'un nombre est supérieur ou égal à 5, il est possible de trouver une autre décomposition de ce nombre avec un meilleur score.

5. Calculer le meilleur score que l'on peut obtenir en décomposant :
- **a.** 58.
- **b.** 59.
- **c.** 60.

Exercice 4
Une opération surprenante

Lilou et Yacine sont tous les deux passionnés de mathématiques.
Lilou dit à Yacine : « regarde, j'ai inventé une nouvelle opération étonnante ».
Yacine est très intrigué. Lilou lui explique alors le fonctionnement de son invention : « je prends deux nombres entiers relatifs x et y, puis je note $x \nabla y$ le nombre défini par $x \nabla y = x^2 - xy$ ».
Elle ajoute : « souviens-toi que $x^2 = x \times x$ et $xy = x \times y$ ».
Yacine, curieux, décide de tester cette nouvelle opération : « d'accord, j'essaie, si je prends $x = 2$ et $y = 3$, j'obtiens $2 \nabla 3 = 2^2 - 2 \times 3$ c'est-à-dire $2 \nabla 3 = 4 - 6$ donc -2 ». Lilou lui dit : « oui, tu as compris ! ».

Le but de cet exercice est d'étudier l'opération ∇ créée par Lilou.

1. Vérifier que $3 \nabla 5 = -6$.
2. Considérons x et y deux nombres entiers et **négatifs**.
   Le signe de $x \nabla y$ est-il le même que celui de $x \times y$?
3. On dit que la multiplication est commutative, c'est-à-dire que pour n'importe quels nombres x et y, on a $x \times y = y \times x$. L'opération ∇ est-elle commutative ?
4. Soit x un nombre entier relatif.
   - **a**. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $x \nabla 0 = 0 \nabla x$?
   - **b**. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $x \nabla 1 = x$?
5. Soit x et y deux nombres entiers relatifs. Pour quelle(s) valeur(s) de x et y a-t-on $x \nabla y = 1$?