Exercice 1

Mur de jetons

1. Le mur numéro 1 a pour force $5 \times 3 + 3 \times 5 + 5 = 35$,
le mur numéro 2 a pour force $7 \times 3 + 5 \times 1 + 3 \times 2 + 1 = 33$. C'est ce numéro 1 qui a la plus grande force.

2. On cherche a, b, c, d entiers compris entre 1 et 6 tels que $7a + 5b + 3c + d = 48$. Un mur possible est :

			1				Somme 1
		2	2	2			Somme 6
	4	4	4	4	4		Somme 20
3	3	3	3	3	3	3	Somme 21
							Total 48

3. Une idée est de ne changer qu'une seule valeur (mais il y a bien des façons de faire) :

		1		
	2	2	2	
1	1	1	1	1

Force 12

		2		
	2	2	2	
1	1	1	1	1

Force 13

		3		
	2	2	2	
1	1	1	1	1

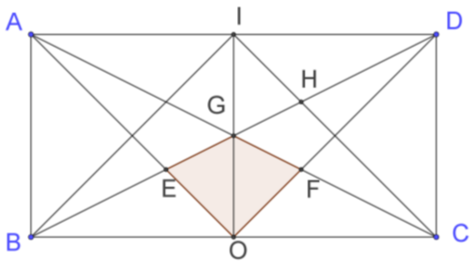
Force 14

4. Pour fabriquer un mur de trois étages de force 20, il faut trouver des entiers a, b, c compris entre 1 et 6 tels que $5a + 3b + c = 20$. Les valeurs possibles pour a sont 1, 2 et 3 car on doit avoir $5a < 20$.
Si $a = 3$, on a $3b + c = 5$, la seule valeur possible pour b est 1 (car on doit avoir $3b < 5$) et alors $c = 2$;
Si $a = 2$, on a $3b + c = 10$, ce qui donne de même $b = 3$ et $c = 1$ ou $b = 2$ et $c = 4$;
Si $a = 1$, on a $3b + c = 15$, ce qui donne $b = 4$ et $c = 3$, ou $b = 3$ et $c = 6$.
Il y a donc 5 murs possibles de force 20.

Exercice 2

Un logo

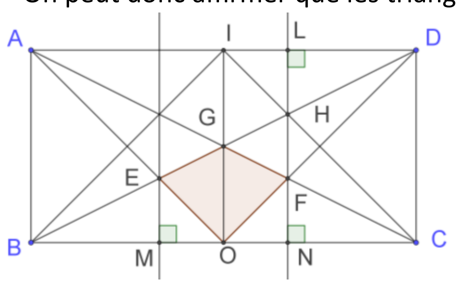
1.



2. Les droites (AB) et (IO) sont parallèles car perpendiculaires toutes les deux à la droite (BC) donc les triangles BGO et BCD sont emboités et comme O est le milieu de $[\mathrm{BC}]$, on en déduit que G est le milieu de $[\mathrm{BD}]$ et que $\mathrm{OG} = \frac{1}{2}\mathrm{OI} = 1$.
(on peut aussi raisonner par symétrie : G est centre de symétrie du rectangle ABCD, donc I le milieu de $[\mathrm{AD}]$ est le symétrique de O le milieu de $[\mathrm{BC}]$ par rapport à G donc $\mathrm{OG} = \mathrm{IG} = \frac{1}{2}\mathrm{OI} = 1$)
On en déduit que l'aire du triangle BOG rectangle en O est $\mathcal{A}_{\mathrm{BOG}} = \frac{\mathrm{BO} \times \mathrm{OG}}{2} = 1$.

3. Le point G est le milieu des segments $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{OI}]$ donc le quadrilatère AICO est un parallélogramme.

4. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles donc les angles alternes-internes $\widehat{\mathrm{DBC}}$ et $\widehat{\mathrm{BDA}}$ ont donc même mesure.
Comme AICO est un parallélogramme, les droites (AO) et (IC) sont parallèles. Les droites (BO) et (ID) sont parallèles. Les angles $\widehat{\mathrm{BOA}}$ et $\widehat{\mathrm{DIC}}$ ont donc même mesure. De plus $\mathrm{BO} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\mathrm{AD} = \mathrm{ID}$.
On peut donc affirmer que les triangles BEO et DIH sont égaux.



5. On note respectivement L le pied de la hauteur issue de H dans le triangle IHD, N le pied de la hauteur issue de H dans le triangle BHC et M le pied de la hauteur issue de E dans le triangle BEO alors :
Dans le triangle BHC, O est le milieu de $[BC]$ et (AO) et (IC) sont parallèles donc BHC est un agrandissement de BEO, les dimensions du premier étant le double de celles du second.
On a donc $HN = 2EM$.

6. On peut donc écrire $2 = AB = LN = LH + HN = EM + HN = 3EM$ soit $EM = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\mathcal{A}_{\mathrm{EGO}} = \mathcal{A}_{\mathrm{BOG}} - \mathcal{A}_{\mathrm{BEO}} = 1 - \frac{BO \times EM}{2} = 1 - \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

d'où, par symétrie d'axe (IO), $\mathcal{A}_{\mathrm{OFGE}} = \frac{2}{3}$.

Exercice 3

Décomposition

1. **a.** $11 = 4 + 7$ score 28
   b. $11 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ score 1
   c. $11 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ score 5
   d. $11 = 3 + 4 + 4$ score 48
2. $11 = 2 + 3 + 3 + 3$ score 54
3. Si $11 = 1 + S, 12 = 2 + S$. Si on appelle P le produit des termes de la somme S, le score passe de P pour 11 à $2P$ pour 12
4. **a.** Si $m = 5 + S$ et si le produit des termes de la somme S est P, en écrivant $m = 2 + 3 + S$, le score passe de $5P$ à $6P$.
   b. Si $m = x + S$ et si le produit des termes de la somme S est P, alors la décomposition $m = 2 + (x - 2) + S$ fait passer le score de xS à $2(x - 2)S$. Ce score est strictement plus grand que le précédent dès que $2(x - 2) > x$, c'est-à-dire $x > 4$
5. En application du résultat formulé à la question précédente, nous allons procéder à des décompositions dont les termes sont tous inférieurs à 5.
   a. $58 = 14 \times 4 + 2$ donne un score égal à $4^{14} \times 2 = 536\,870\,912$
   Comme $4 = 2 + 2$, et $4 = 2 \times 2$, il n'y a pas d'intérêt à remplacer une suite de 4 par une suite de 2 ou une suite de 2 par une suite de 4.
   $58 = 19 \times 3 + 1$ donne un score égal à $3^{19} \times 1 = 1\,162\,261\,467$
   $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, mais $3^2 = 9$ tandis que $2^3 = 8$. Une suite de deux 3 est donc préférable à une suite de trois 2, mais une des questions précédentes nous amène à ne pas utiliser 1.
   $58 = 18 \times 3 + 4$ donne un score égal à $3^{18} \times 4 = 1\,549\,681\,956$. C'est le meilleur score.
   b. $59 = 19 \times 3 + 2$ donne un score égal à $3^{19} \times 2 = 2\,324\,522\,934$. C'est le meilleur score.
   c. $60 = 20 \times 3$ donne un score égal à $3^{20} = 3\,486\,784\,401$. C'est le meilleur score

Exercice 4

Une opération surprenante

1. Par définition, $3\nabla 5 = 3^2 - 3 \times 5 = 9 - 15 = -6$
2. $x\nabla y = x^2 - x \times y = x \times (x - y)$. Comme x est négatif, le signe de ce produit est le signe contraire à celui de $x - y$. Il est positif si $x - y \leq 0$, c'est-à-dire si $x \leq y$, négatif dans le cas contraire.
   Donc la réponse est non, il suffit de proposer un contre-exemple :
   $(-1)\nabla(-2) = -1$ est négatif et $(-1) \times (-2) = 2$ est positif.
3. $x\nabla y = x^2 - x \times y$ et $y\nabla x = y^2 - y \times x$.
   On voit que $1\nabla 2 = -1$ tandis que $2\nabla 1 = 2$. L'opération n'est pas commutative.
4. **a.** $x\nabla 0 = x^2$ et $0\nabla x = 0$. Il n'y a égalité que dans le cas $x = 0$
   b. $x\nabla 1 = x^2 - x$. L'égalité $x^2 - x = x$ se produit pour $x(x - 2) = 0$, c'est-à-dire pour 0 et 2.
5. $x\nabla y = 1$ s'écrit $x^2 - xy = 1$ ou encore $x(x - y) = 1$

Ce produit d'entiers ne peut valoir 1 que si les deux facteurs valent 1 ou -1.
On a donc soit $x = 1$ et $x - y = 1$ donc $y = 0$
soit $x = -1$ et $x - y = -1$ donc $y = 0$