# Rallye mathématique du Centre

## Épreuve préparatoire - Décembre 2024

**$3^e$ : Exercices 1 à 6 et Info/Algo**
**$2^{de}$ : Exercices 1 à 8 et Info/Algo**

**Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.**
**Les solutions partielles seront examinées.**
**Bon courage et rendez-vous le 13 mars pour l'épreuve officielle.**

### Exercice n°1 — Attaque fréquentielle

**7 points**

| La lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 10 | 4 | 13 | 2 | 0 | 9 | 1 | 6 | 6 | 0 | 22 | 1 | 11 | 0 | 6 | 1 | 0 | 4 | 5 | 5 | 4 | 0 | 1 | 1 | 11 | 10 |
| Fréquence | 7,5 | 3 | 9,8 | 1,5 | 0 | 6,8 | 0,7 | 4,5 | 4,5 | 0 | 16,5 | 0,7 | 8,3 | 0 | 4,5 | 0,7 | 0 | 3 | 3,8 | 3,8 | 3 | 0 | 0,7 | 0,7 | 8,3 | 7,5 |
| Code la lettre | C | F | A | H | K | N | Q | R | U | W | E | G | I | B | D | Z | X | V | L | O | M | J | Y | P | S | T |

*Message décodé* :
**FELICITATIONS , EN DECODANT TRES ASTUCIEUSEMENT CE MESSAGE CODE VOUS AVEZ FRANCHI UN PAS DECISIF VERS LA VICTOIRE FINALE DANS CE RALLYE MATHEMATIQUE DU CENTRE.**

### Exercice n°2 — On ne peut pas tout faire !

**12 points**

Zigzag $L = 20\sqrt{10} + 3 + 30 \approx 96,25$ cm
Directe $L = 10\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{109} + 30 \approx 102,06$ cm
Rapide $L = 10\sqrt{10} + 9 \times 3 + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,28$ cm
Collet Français $L = 2\sqrt{10} + 10 \times 3 + 9\sqrt{13} + 30 \approx 98,77$ cm
Semi-directe $L = 8\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{13} + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,57$ cm
Créneau $L = 10 \times 3 + 10 + \sqrt{109} + 30 \approx 80,44$ cm

Maud peut utiliser le zigzag, le collet français et le créneau.

## Exercice n°3 — Nombres harshad

**8 points**

1. 11 est le plus petit nombre qui n'est pas harshad.
2. Voici la liste de tous les nombres harshad inférieurs à 200 :
   1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200.
3. $10^{32}$ est un nombre harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
4. $10^{23}+2$ est un nombre harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.
5. Non, il n'existe pas de nombre harshad premier strictement supérieur à 7.
   En effet, si un tel nombre N existait, il serait :
   - divisible par la somme de ses chiffres
   - supérieur à 10 (car le plus petit nombre premier strictement supérieur à 7 est 11).
   En observant que la somme des chiffres d'un entier supérieur à 10 est toujours strictement inférieure à cet entier, il vient :
   • si la somme des chiffres vaut 1 alors le nombre vaut 1 qui est inférieur à 7 ou il est une puissance de 10 et n'est donc pas premier.
   • sinon, la somme de ses chiffres est alors un diviseur de N compris entre 2 et N-1, ce qui est impossible car N est premier.
   c.q.f.d

## Exercice n°4 — La tour infernale de MathCraft

**10 points**

1. $1+3+5+7=16$. La hauteur de la tour de 4 structures cubiques est de 16 briques.
2. On note que chaque structure en dessous d'une autre a deux briques de plus sur chaque côté.
   On note $p$ le nombre de structures cubiques de la plus haute tour.
   On détermine le plus grand entier $p$ tel que $1+3+5+...+(2p+1) \leq 191$.
   Par additions successives on trouve $2p+1=25$.
   La tour de Mattéo comprend au plus 13 structures cubiques.
   Dans ce cas la tour mesure $1+3+5+7...+21+23+25=169$ briques de haut.

3. Calcul du nombre de briques nécessaires pour construire la tour la plus haute :
   $1^3+3^3+5^3+7^3+...+23^3+25^3=56\ 953$.

   Le temps passé par Mattéo sera égal à $\dfrac{56953}{13}\times 4 = 17\ 524$ s. Donc un temps de 4 h 52 min 4s.
4. On ne peut construire deux tours de la plus grande hauteur possible avec 83 000 briques seulement. Mais si l'on retire de celle-ci la structure de $25^3$ briques on pourra construire chaque tour avec 56 953 - $25^3 = 41\ 328$ briques ; donc 82 656 briques pour les deux. Il restera alors 344 briques non utilisées.
   La hauteur de chacune des tours sera égale à $1+3+5+7...+21+23=144$ briques.

## Exercice n°5 — Meuble sous toit

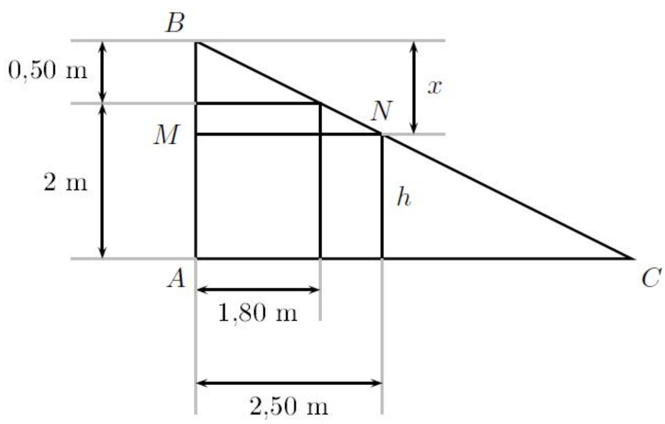
**5 points**

Posons $BM=x$ et $AM=h$ (voir figure).
Utilisons le théorème de Thalès dans le triangle $BMN$ (ou en utilisant $\tan(\widehat{ABC})$) pour écrire :

$$\frac{0,5}{x}=\frac{1,8}{2,5} \quad \text{d'où} \quad x=\frac{2,5\times 0,5}{1,8}=\frac{25}{36}$$

$$h=2,5-\frac{25}{36}\approx 1,8055$$

Le locataire peut donc mettre à la même place le meuble de 1,80 m sur 2,50 m.
Remarque : c'est loin d'être la seule méthode !



**Exercice n°6** **L'aire intérieure**

**10 points**

On cherche tout d'abord l'aire du triangle ABC.

AB = AC = BC = 6 cm donc ABC est équilatéral.

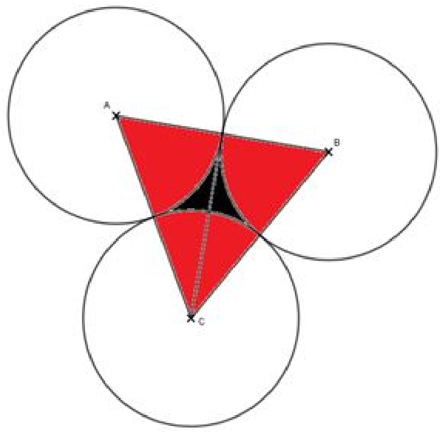
Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet passe par le milieu du côté opposé.

D'après le théorème de Pythagore, la hauteur $h$ de ce triangle est donnée par :

$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{27} \text{ (ou } 3\sqrt{3}\text{)}$$

Ainsi, l'aire du triangle est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{6\times\sqrt{27}}{2} = 3\sqrt{27} \text{ (ou } 9\sqrt{3}\text{)}$$




Le triangle ABC est composé de :

- La surface noire qui nous intéresse
- 3 secteurs circulaires de même aire (secteurs de même rayon et de même angle 60° car le triangle ABC est équilatéral)

60° est le sixième de 360°.

Ainsi l'aire d'un secteur rouge est égale à un sixième de l'aire totale du disque.

$$\mathcal{A}_{secteur\ rouge} = \frac{1}{6} \times \pi \times 3^2 = \frac{3\pi}{2}$$

Donc l'aire de la partie noire est donc :

$$\mathcal{A}_{partie\ noire} = 3\sqrt{27} - 3 \times \frac{3\pi}{2} = 3\sqrt{27} - \frac{9\pi}{2} \text{ (ou } 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2}\text{)}$$

| Compétence « chercher » | | | |
|---|---|---|---|
| **Niveau insuffisant** | **Niveau fragile** | **Niveau satisfaisant** | **Très bonne maitrise** |
| L'élève n'entre pas dans la tache<br><br>0 pt | L'élève reproduit la figure correctement, mais sans rien en faire (ou rien de significatif)<br><br>OU<br><br>Sans aucune construction, l'élève élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, …) mais utilise des mesures « fictives » (erronées)<br><br>3 pts | L'élève reproduit la figure correctement et élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, …), même avec des erreurs de calculs ou des mesures prises sur le dessin<br><br>OU<br><br>Sans aucune construction, l'élève élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, …) en essayant, même avec erreurs, de déterminer les mesures nécessaires par le calcul.<br><br>5 pts | Avec construction, éléments du « satisfaisant » + l'élève mentionne, d'une façon ou d'une autre que le résultat établi est une approximation (par l'utilisation d'un $\approx$ au début des calculs, par exemple).<br><br>OU<br><br>Sans construction, éléments du « satisfaisant » + l'élève détermine correctement quelques mesures nécessaires par le calcul et les utilisent de façon pertinente<br><br>6 pts |

**Aboutissement au résultat attendu :**

- en valeur approchée au dixième : +1
- en valeur exacte : +2

| Compétence « communiquer » | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Indicateurs** | **Niveau insuffisant** | **Niveau fragile** | **Niveau satisfaisant** | **Très bonne maitrise** |
| • Les unités sont utilisées correctement<br>• Au moins une condition d'un théorème ou d'une propriété est mentionnée (pour théorème de Pythagore, ou concernant la hauteur d'un triangle équilatéral, ou l'égalité des angles d'un triangle équilatéral, …)<br>• Les conditions des théorèmes et propriétés utilisées sont mentionnées au moins deux fois<br>• La démarche est explicitée (construction, découpage, …) → **Compte pour deux indicateurs** | Moins de deux indicateurs observés<br><br>0 pt | Seulement 2 ou 3 indicateurs observés<br><br>1 pt | Seulement 4 indicateurs observés<br><br>1,5 pt | Les 5 indicateurs observés<br><br>2 pts |

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ $\boxed{\textbf{Boxed Products}}$

**5 points**

Soit :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | 2 | $a_4$ | $a_5$ | 4 | $a_7$ | $a_8$ | $x$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | 3 | $a_{13}$ | $a_{14}$ |

Comme $a_1 \times a_2 \times 2 \times a_4 = a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 120$, $a_1 = a_5$.
De même $a_2 \times 2 \times a_4 \times a_5 = 2 \times a_4 \times a_5 \times a_6$ donc $a_2 = a_6 = 4$.

De façon générale : $a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} \times a_{n+4}$ donc $a_n = a_{n+4}$
On peut utiliser cette information et la grille devient :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 | 2 | 3 | $x$ | 4 |

$x \times 4 \times 2 \times 3 = 120 \Rightarrow x = 5$
Soit finalement :

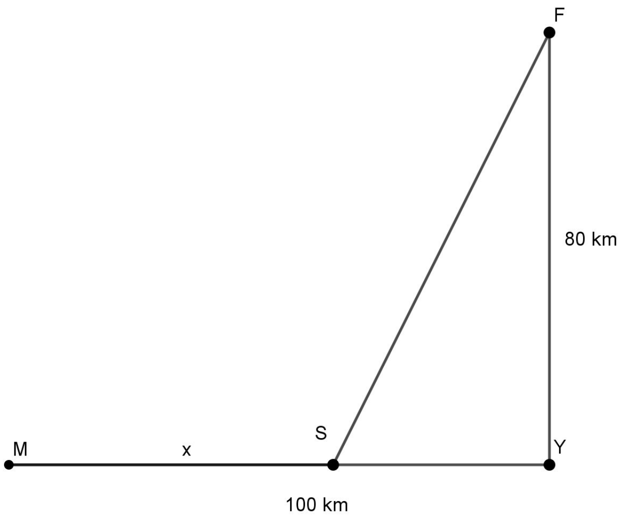
| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 |

Ainsi $x$=5 est la seule solution possible.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$ $\boxed{\textbf{De Mercalme au fort Thune}}$

**8 points**

On pose :
M : port de Mercalme, F : le fort Thune, Y : la ville de Yakoto, S : la station à construire (voir la figure ci dessous).
On a MY = 100 km , FY = 80 km , et note MS = $x$ km.




Par le théorème de Pythagore on obtient :
$\text{SF}^2 = 80^2 + (100 - x)^2$ donc $\text{SF} = \sqrt{80^2 + (100 - x)^2}$

Le transport par caravane dans le désert étant trois fois plus cher que par la ligne de chemin de fer, on minimise donc la grandeur MS+3× SF.

On se ramène à l'étude de la fonction $f$ définie par $f : [0, 100] \to \mathbf{R}$
$$x \mapsto x + 3\sqrt{80^2 + (100 - x)^2}.$$

À l'aide de la calculatrice ou du tableur, on trouve un minimum atteint pour $x = 72$ km à l'unité près.

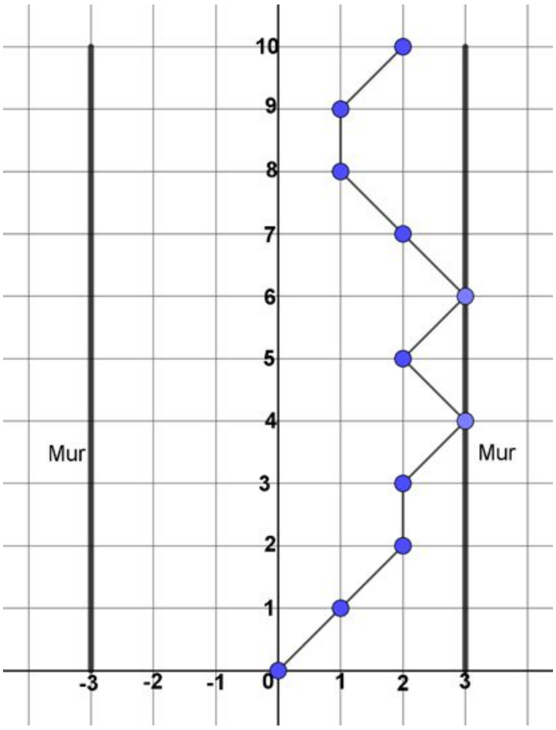
| | |
|---|---|
| 65 | 326,963738 |
| 66 | 326,775766 |
| 67 | 326,617026 |
| 68 | 326,487911 |
| 69 | 326,388811 |
| 70 | 326,320112 |
| 71 | 326,282197 |
| 72 | 326,275441 |
| 73 | 326,300217 |
| 74 | 326,35689 |
| 75 | 326,445819 |
| 76 | 326,567356 |
| 77 | 326,721845 |
| 78 | 326,909622 |

Exercice Informatique-Algorithmique | La balle errante

**10 points**

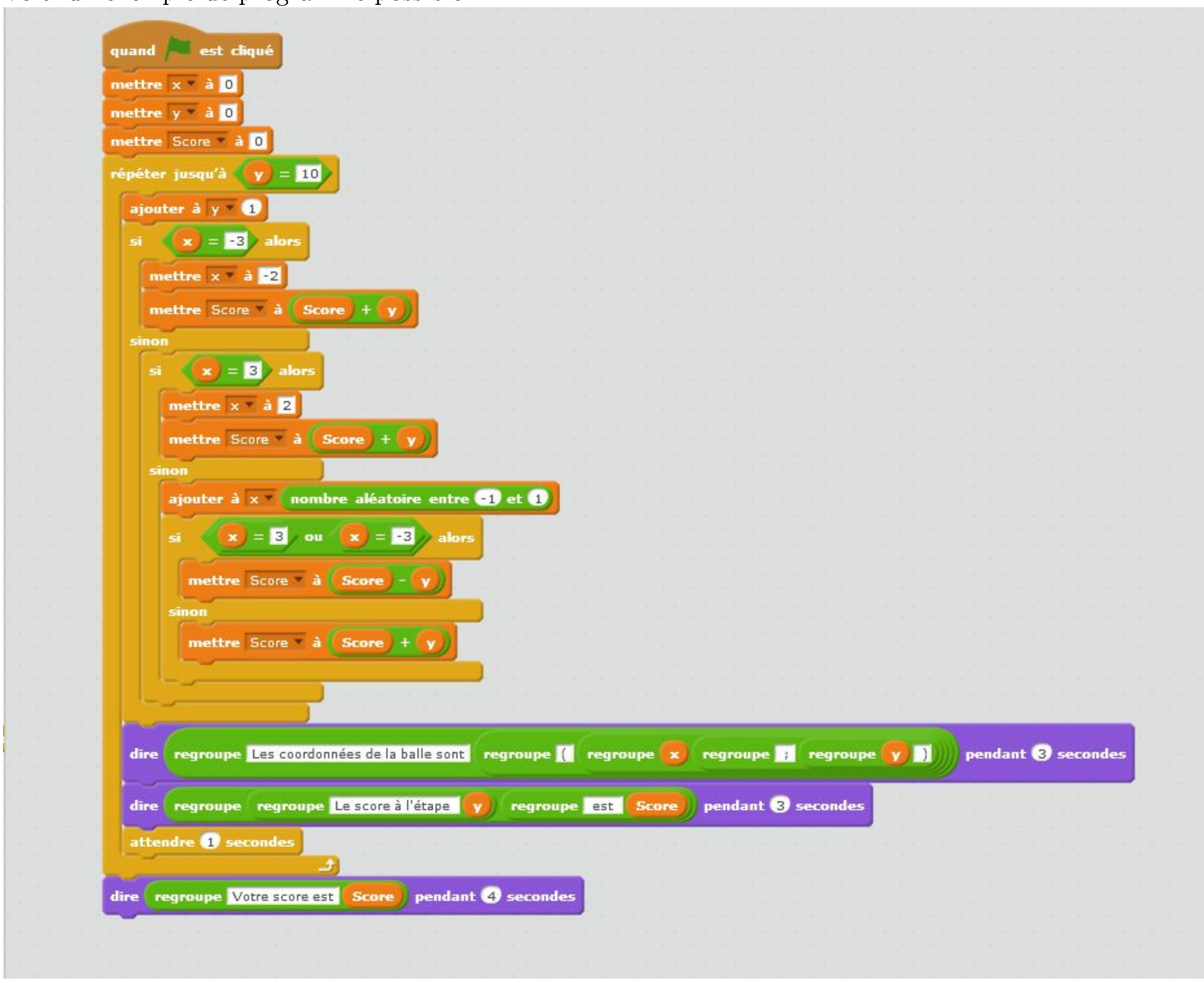
1. (a) Pour avoir le score maximum, il ne faut jamais toucher le mur.
   Score maximum : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

   (b) Il y a plusieurs parcours possibles. Dans tous les cas la balle doit toucher le mur à l'étape 4 et à l'étape 6. Voici un exemple de parcours possible.




   (c) Score minimum : 1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +7 - 8 + 9 - 10 = -1

2. Voici un exemple de programme possible.



```python
from random import*
x=0
y=0
score=0
for y in range(1,11):

    if x==-3:
        x=-2
        score=score+y

    elif x==3:
        x=2
        score=score+y

    else:
        x=x+randint(-1,1)
        if x==3 or x==-3:
            score=score-y
        else:
            score=score+y
    print("Etape: ",y)
    print("Les coordonnées de la balle sont : (",x,";",y,")")
    print("Le score à l'étape ",y," est",score,".")
print("-----")
print("Le score finale est",score,".")
```